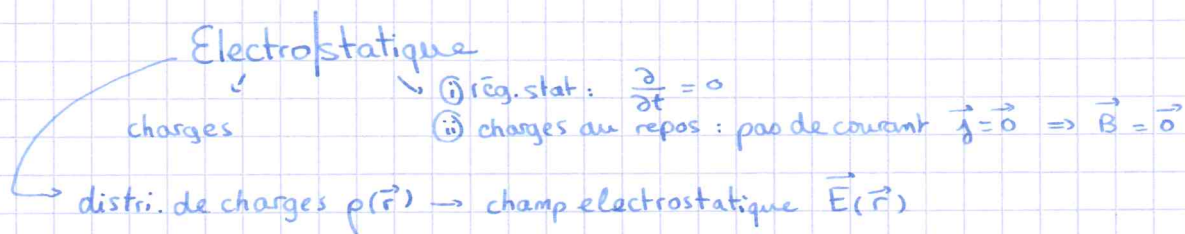


EM2: CHAMP ELECTRIQUE EN REGIME STATIONNAIRE



I - Les equations locales de l'electrostatique

1 - Equation de Maxwell-Gauss

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad \text{Maxwell-Gauss LOCALE}$$

ϵ_0 : permittivite dielectrique du vide

$$\epsilon_0 \approx \frac{1}{30\pi} \cdot 10^{-9} \approx 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ F}^{-1} \cdot \text{m}$$

2 - Equation de Maxwell-Faraday de l'electrostatique

$$\text{rot } (\vec{E}(\vec{r})) = \vec{0} \quad \text{Maxwell-Faraday LOCALE}$$

\rightarrow en cartésiennes: $\text{rot } (\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

3 - Linearite: th de superposition

eq lineaire $\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot } (\vec{E}) = \vec{0} \end{cases}$ derivees spatiales de E_x, E_y, E_z
ope. lineaires

th de superp: Soit ρ_1 et ρ_2 , 2 distributions de charges, creant \vec{E}_1 et \vec{E}_2

Alors " $\alpha \rho_1 \cup \beta \rho_2$ " cree $\vec{E} = \alpha \vec{E}_1 + \beta \vec{E}_2$

\downarrow
 $\alpha \rho_1 + \beta \rho_2$

II - Flux de \vec{E} : théorème de Gauss

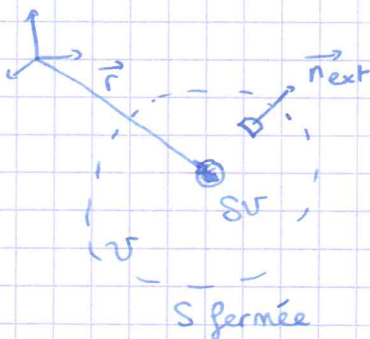
1. Théorème de Gauss

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) \delta V = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}) \delta V$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q^{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

th. de Gauss
équation intégrale



2. Quand et comment mettre en œuvre le théorème de Gauss?

(a) Quand? dans les cas de hautes symétries car $\oint \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS$ doit être calculable

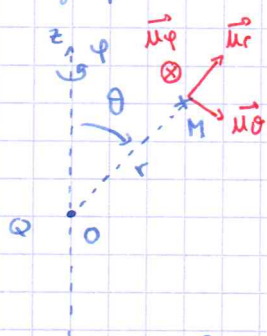
↓
 { sphérique
 cylindrique
 plane ∞

(b) Comment?

- Faire un dessin.
- Choisir le bon système de coord. et dessiner la base LOCALE
- Utiliser le principe de Curie :
 - symétries \Rightarrow géométries de \vec{E}
 - invariances \Rightarrow dépendance de \vec{E} p.r. aux coord.
- Choisir la surface de Gauss appropriée et la dessiner.
 - fermée
 - calcul de $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS$ simple
- Appliquer le théorème de Gauss

3. Exemples fondamentaux

(a) Charge ponctuelle : la loi de Coulomb



a priori :
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_r(r, \theta, \varphi) \\ E_\theta(r, \theta, \varphi) \\ E_\varphi(r, \theta, \varphi) \end{pmatrix}$$

• Symétries : $\forall M$ le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) = \text{PS}$ pour Q

$$\Rightarrow E_\varphi(r, \theta, \varphi) = 0$$

• $\forall M, (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi) = \text{PS}$ pour $Q \Rightarrow E_\theta(r, \theta, \varphi) = 0$

$$\Rightarrow \vec{E} = E(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

• Invariances : \forall pour les rotations autour de Oz (sym de révo d'axe Oz) : $\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0$

• inv par rotation autour de $(O, \vec{u}_\varphi) \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0$

• surface de Gauss : sphère de centre O
rayon r

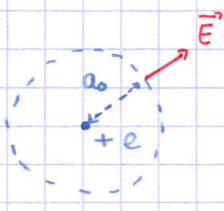
$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \oint_S E(r) dS = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{loi de Coulomb}$$

OG : champ régnant ds l'atome H

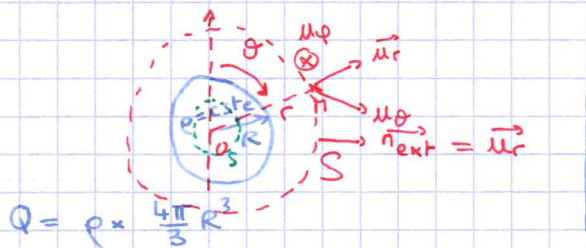
$a_0 = 53 \text{ pm}$

rayon de Bohr



$$E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{(53 \cdot 10^{-10})^2} \approx 5 \cdot 10^{11} \text{ V.m}^{-1}$$

(b) Sphère uniformément chargée en volume ou en surface



^ surface de Gauß que précédemment

Sym et inv : cf. charge ponctuelle : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} dS = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q^{\text{int}}(r)}{\epsilon_0}$$

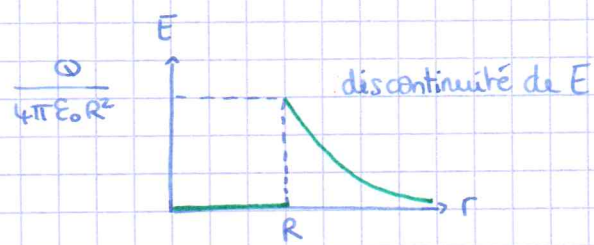
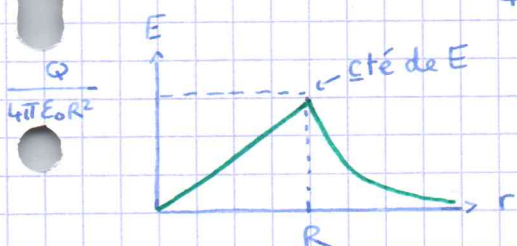
ρ

$(r > R)$ $Q^{\text{int}}(r > R) = Q$
 $\Rightarrow \vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$

$(r > R)$ $Q^{\text{int}}(r > R) = Q$
 donc $\vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$

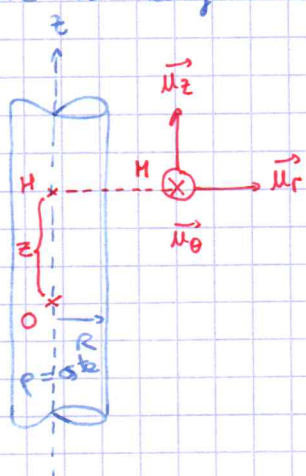
$(r \leq R)$ $Q^{\text{int}}(r \leq R) = \rho \times \frac{4\pi}{3} r^3 = Q \left(\frac{r}{R}\right)^3$
 $\Rightarrow \vec{E}(r \leq R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{r}{R}\right) \cdot \vec{u}_r$
 $\propto r$

$(r < R)$ $Q^{\text{int}}(r < R) = 0$
 $\Rightarrow \vec{E}(r < R) = 0$



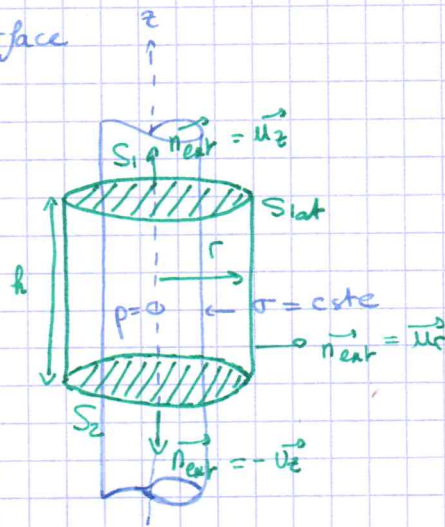
↳ conséquence du modèle des charges surfaciques

(c) Cylindre "∞" uniformément chargé en volume ou en surface



a priori:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_r(r, \theta, z) \\ E_\theta(r, \theta, z) \\ E_z(r, \theta, z) \end{pmatrix}$$



⊙ Symétries : ⊙ $\forall M$, le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) = PS \Rightarrow E_\theta(r, \theta, z) = 0$

⊙ $\forall M$, le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) = PS \Rightarrow E_z(r, \theta, z) = 0$
 ↳ car "∞"

donc $\vec{E} = E(r, \theta, z) \vec{u}_r$

⊙ Invariances : → invariance par rotⁿ / axe Oz $\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0$
 → translⁿ // Oz $\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial z} = 0$

$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$

⊙ Surface de Gauss : cyl. d'axe Oz fermé en haut et bas
 rayon r

⊙ th. de Gauss :

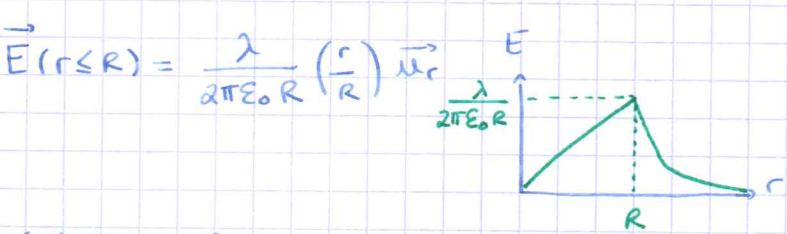
$$\oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_{lat}} \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} dS = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{u}_z dS + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot (-\vec{u}_z) dS + \iint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot \vec{u}_r dS$$

$$= \iint_{S_{lat}} E(r) dS = 2\pi r h E(r)$$

$\Rightarrow E(r) \times 2\pi r h = \frac{Q^{int}(r)}{\epsilon_0}$

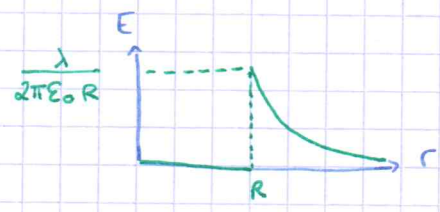
$r \geq R$ $Q^{int}(r \geq R) = \rho \pi R^2 h$
 $\vec{E}(r \geq R) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{u}_r$

$r \leq R$ $Q^{int}(r \leq R) = \rho \times \pi r^2 h$
 or $\lambda = \rho \pi R^2 \Rightarrow Q^{int} = \lambda h \left(\frac{r}{R}\right)^2$

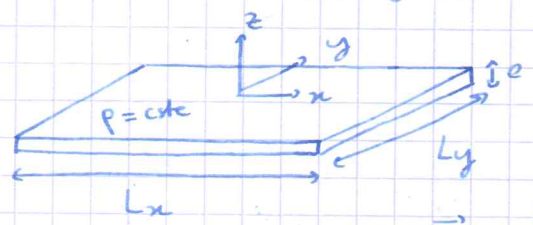


$r > R$ $Q^{int}(r > R) = \sigma \times 2\pi R R$
 $\vec{E}(r > R) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{u}_r$

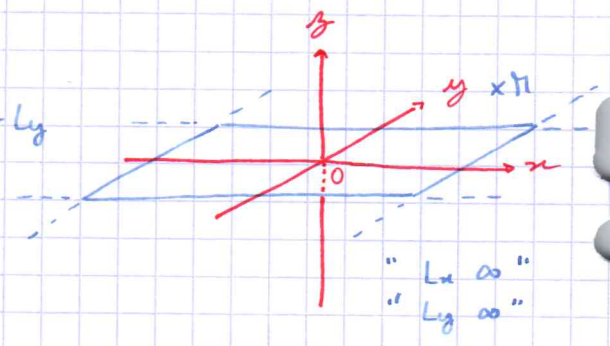
$r < R$ $Q^{int}(r < R) = 0$
 $\Rightarrow \vec{E}(r < R) = \vec{0}$



(d) Plan uniformément chargé en surface



$e \ll L_x \text{ et } L_y$



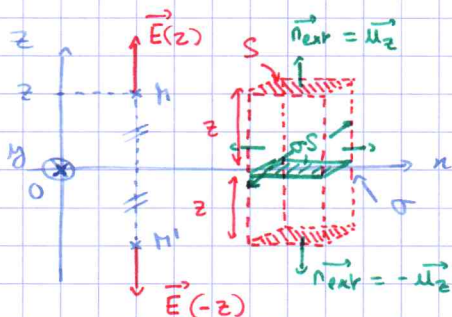
A priori : $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) \end{pmatrix}$

⊙ symétries : $\rightarrow \forall M$ le plan $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z) = PS \Rightarrow E_x(x, y, z) = 0$
 $\rightarrow \text{le plan } (M, \vec{u}_x, \vec{u}_z) = PS \Rightarrow E_y(x, y, z) = 0$

⊙ Invariances : par translation // \vec{u}_x et \vec{u}_y

$$\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial y} = 0 \Rightarrow \vec{E} = E(z) \vec{u}_z$$

⊙ de + le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ est PS \rightarrow c'est aussi un PS pour \vec{E}



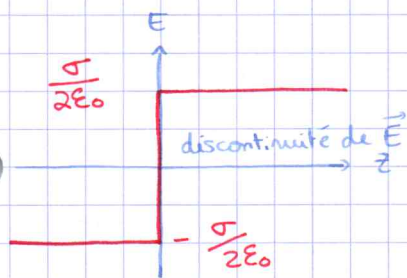
donc $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z) \Rightarrow E(-z) = -E(z)$

⊙ Surface de Gauss : parallélépipède de géné. // \vec{u}_z et de fermeture z et $-z$.

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} dS = 0 + 0 + 0 + 0 + E(z) \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z \times S + E(-z) \vec{u}_z \cdot (-\vec{u}_z) \times S = 2E(z) \times S$$

et $\frac{Q^{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \vec{u}_z$

$$\vec{E}(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \vec{u}_z$$



(e) Modèle de la distribution surfacique de charges

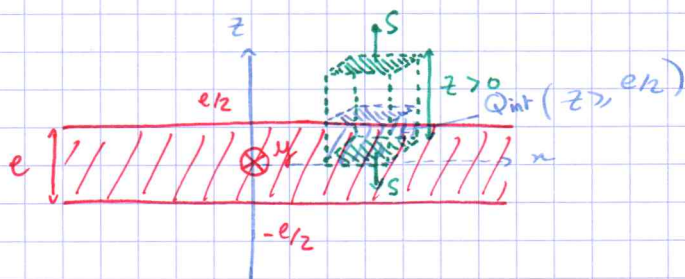
\rightarrow p^t de départ : couche de charges plane ∞ (p unif).

⊙ M sym et invariances

$$\Rightarrow \vec{E} = E(z) \vec{u}_z$$

avec $E(-z) = -E(z)$

(donc $E(0) = 0$)



⊙ Surface de Gauss : la même avec la base en $z=0$.

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} dS = +E(z)S - \underbrace{E(0)}_0 \times S + 0 + 0 + 0 + 0$$

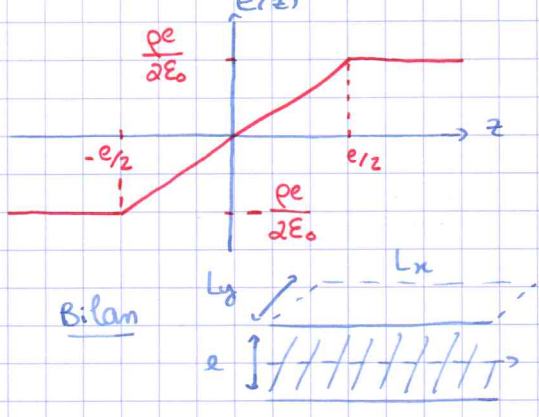
$$\rightarrow z \geq \frac{e}{2} \quad (z \geq 0) \quad Q^{int}(z \geq \frac{e}{2}) = \rho \times S \times \frac{e}{2} \quad \rightarrow 0 \leq z \leq \frac{e}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}(z \geq \frac{e}{2}) = \frac{\rho e}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \\ \vec{E}(z \leq -\frac{e}{2}) = -\frac{\rho e}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \end{cases}$$

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} dS = E(z) \times S$$

$$Q^{int}(z) = \rho S z$$

$$\begin{cases} \vec{E}(0 \leq z \leq \frac{e}{2}) = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{u}_z \\ \vec{E}(-\frac{e}{2} \leq z \leq 0) = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{u}_z \end{cases}$$



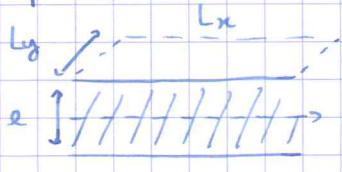
on va à $pe = \text{cste}$

$e \rightarrow 0$: le champ devient continu

$$\vec{E}(z) = + \frac{pe}{2\epsilon_0} \vec{u}_z = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$$

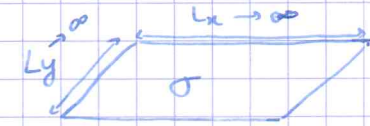
$$\begin{aligned} & \text{C.m}^{-2} \\ & \sigma = \rho \times e \\ & \text{C.m}^{-3} \end{aligned}$$

Bilan



$e \ll L_x \text{ et } L_y$

Modèle

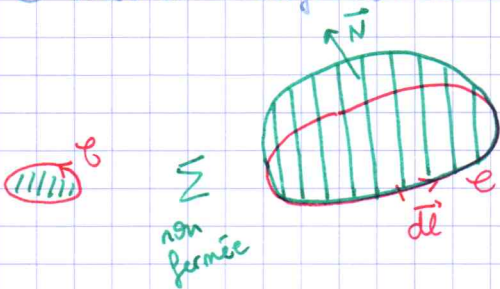


\vec{E} discontinu

III - Circulation conservative du champ électrostatique \vec{E} , Potentiel électrostatique V

1. Opérateur rotationnel : théorème de Stokes

● Théorème - définition de Stokes



Soit $\vec{A}(\vec{r})$ au moins \mathcal{C}^2

$$\oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{A}) \cdot \vec{N} d\Sigma$$

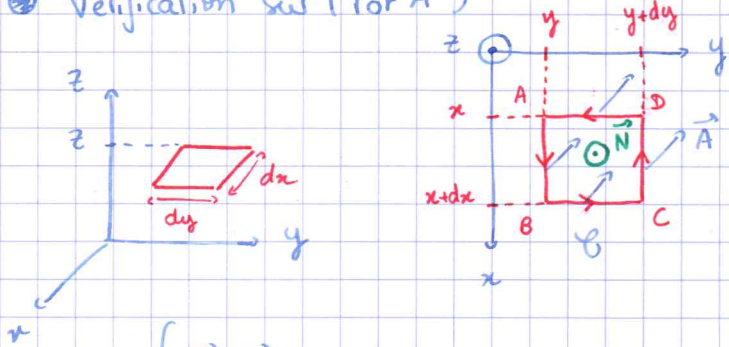
"circulation de \vec{A} le long de C "

● en cartésiennes

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

● Vérification sur $(\text{rot } \vec{A})$



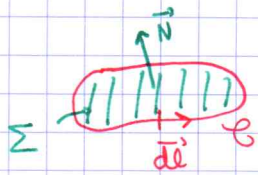
$$+ (-A_y(x, y+dy, z) dy)$$

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \underbrace{A_x(x, y, z) dx}_B \underbrace{+ A_y(x+dx, y, z) dy}_C + \underbrace{(-A_x(x, y+dy, z) dx)}_D$$

$$= - \frac{\partial A_x}{\partial y} (x, y, z) dy dx + \frac{\partial A_y}{\partial x} (x, y, z) dx dy$$

$$= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z d\Sigma$$

2. Circulation conservative de \vec{E}



$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$$

$$\oint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{E}) \cdot \vec{N} d\Sigma = 0 \Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = 0$$

3. Potentiel électrostatique $V(\vec{r})$

(a) Champ $\vec{E}(\vec{r})$ et potentiel $V(\vec{r})$

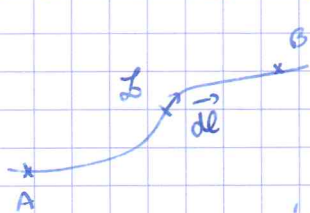
⊗ Soit $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$

$$\vec{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{rot}(\vec{\text{grad}} f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{rot}(\vec{\text{grad}} f) = \vec{0}$ (Schwarz)

⊗ En électrostatique : $\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \Leftrightarrow \exists V(\vec{r}) / \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\text{grad}} V(\vec{r})$

(b) Circulation de \vec{E} entre 2 pts



$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{l} = -(V(B) - V(A))$$

$$\vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{l} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \hat{=} dV$$

"différentielle de V"

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \underbrace{V(A) - V(B)}_{\text{ddp}} \quad \text{ indép. du chemin suivi}$$

(c) Quelques OG

⊗ \vec{E} entre les armatures d'un condensateur plan.

$u = 10V$ \uparrow \downarrow $e = 100 \mu m$

$$E \sim \frac{U}{e} = \frac{10}{10^{-4}} = 100 \text{ kV.m}^{-1}$$

⊗ Ligne HT bifilaire

$$E \sim \frac{U}{d} = 125 \text{ kV.m}^{-1}$$

$d = 4m$ \uparrow \downarrow $U = 500kV$

⊗ Batterie de téléphone portable $u \sim 6V$
 $d \sim 99 \text{ cm}$
 $\Rightarrow E \approx 100 \text{ V.m}^{-1}$

⊗ Champ disruptif de l'air


ionisation de l'air $E_d \sim 3MV.m^{-1}$

⊗ Champ ds l'atmosphère terrestre par beau temps :

$E \sim 99 \text{ à } 100 \text{ V.m}^{-1}$

4. Potentiel créé par une charge ponctuelle.

(a) 1 charge :



$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \vec{E} = -\text{grad} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$

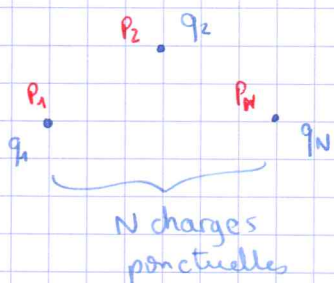
$$\Rightarrow \frac{dV}{dr} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cste}$$

On choisit $V(\infty) = 0$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{1 charge ponctuelle}$$

(b) Distribution discrète de charges



$$x_M \rightarrow \begin{cases} \vec{E}(M) \\ V(M) \end{cases} ?$$


Th. de superposition :

$$V(M) = \sum_{i=1}^N V_i(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M}$$

et $\vec{E}(M) = -\text{grad} V(M)$

5. Potentiel créé par une distribution continue de charges à symétrie sphérique ou cyl.

(a) Symétrie sphérique



$$\rho \quad \vec{E}(r \leq R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{r}{R} \vec{u}_r$$

$$\vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

• $r > R$ $\frac{dV}{dr} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$\Rightarrow V(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

• $r < R$ $\frac{dV}{dr} = -\frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$

$$V(r) = -\frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + \text{cste} \quad \text{cste} = \frac{3}{8} \frac{Q}{\pi\epsilon_0 R}$$

→ continuité de V en $r=R$:

$$V(r) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right)$$

(b) Symétrie cylindrique

$$\vec{E}(r > R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \frac{r}{R} \vec{u}_r$$

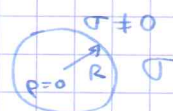


$$\lambda = \rho \pi R^2$$

$V(r=R) = 0$ arbitraire

$r > R$ $\frac{dV}{dr} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + \text{cste}$

$$\Rightarrow V(r > R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right)$$



$$\vec{E}(r < R) = \vec{0}$$

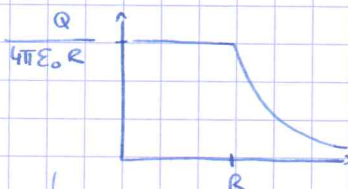
$$\vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

• $r > R$ idem

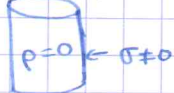
$$V(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (V(\infty) = 0)$$

• $r < R$: $E(r < R) = 0 = -\frac{dV}{dr}$

$$V(r \leq R) = \text{cste} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{par continuité de V (discontinuité finie pr } \vec{E})$$



$$\lambda = \sigma \times 2\pi R$$



$$\vec{E}(r > R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

$$\vec{E}(r < R) = \vec{0}$$

• $r > R$ idem : $V(r > R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right)$

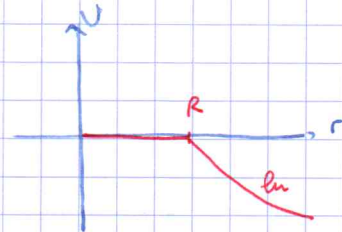
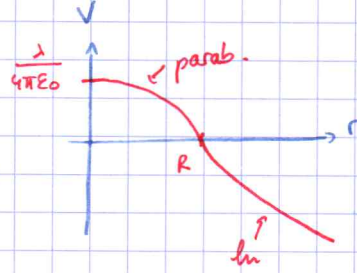
• $r < R$: $\frac{dV}{dr} = 0$

$$\Rightarrow V = \text{cste} = 0 \quad \text{par cste}$$

• $r \leq R$: $\frac{dV}{dr} = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0 R^2}$

$\Rightarrow V(r) = -\frac{\lambda r^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} + \text{cte}$ continuité de V en $r=R$

$V(r \leq R) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$



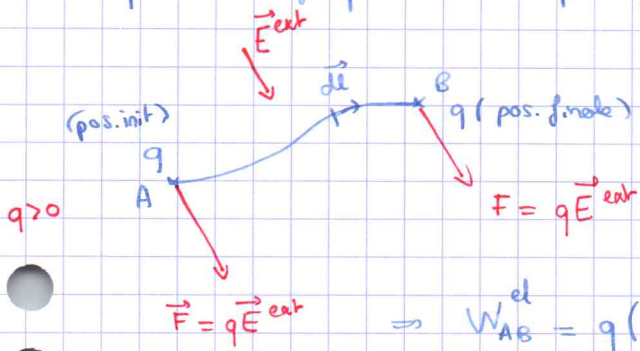
6- Energie potentielle électrostatique d'une charge dans un champ extérieur

\rightarrow q = charge ponctuelle plongée ds \vec{E}^{ext}

$W_{AB}^{\text{el}} = \int_A^B \vec{F}_u \cdot d\vec{l} = \int_A^B q \vec{E}^{\text{ext}} \cdot d\vec{l}$

or $\vec{E}^{\text{ext}}(\vec{r}) = -\text{grad } V^{\text{ext}}(\vec{r})$

$\vec{E}^{\text{ext}} \cdot d\vec{l} = -dV^{\text{ext}}$



$\vec{F} = q \vec{E}^{\text{ext}} \Rightarrow W_{AB}^{\text{el}} = q(V^{\text{ext}}(A) - V^{\text{ext}}(B))$

donc $\exists E_p / W_{AB}^{\text{el}} = -\Delta E_p^{\text{ext}} = E_p^{\text{ext}}(A) - E_p^{\text{ext}}(B) \Rightarrow E_p^{\text{el}} \hat{=} qV^{\text{ext}}$

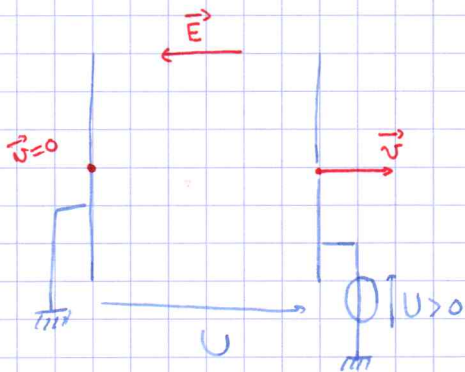
énergie potentielle d'interaction électrostat. de q avec $\vec{E}^{\text{ext}} = -\text{grad } V^{\text{ext}}$

\rightarrow définition de l'électron Volt.

1eV = énergie gagnée par une charge $+e$ soumise à $U = V^{\text{ext}}(A) - V^{\text{ext}}(B) = 1V$

1eV = $1 \times e = 1,6 \cdot 10^{-19} J$

Application: canon à électron



conservation de l'énergie:

$E_c + E_p = \text{cte}$

$\frac{1}{2}mv^2 - eU = \text{cte} \stackrel{\text{c.r.}}{=} 0$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \propto \sqrt{U}$

\rightarrow Approche relativiste

$E = \gamma mc^2$

$\gamma \hat{=} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

où $\beta \hat{=} \frac{v}{c}$

$E = E_c + mc^2$

$\Rightarrow E_c = (\gamma - 1)mc^2$

$(\gamma - 1)mc^2 - eU = 0$

$\Rightarrow \gamma = 1 + \frac{eU}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\Rightarrow 1 - \beta^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{eU}{mc^2}\right)^2}$

\rightarrow énergie de masse d'un e^- :

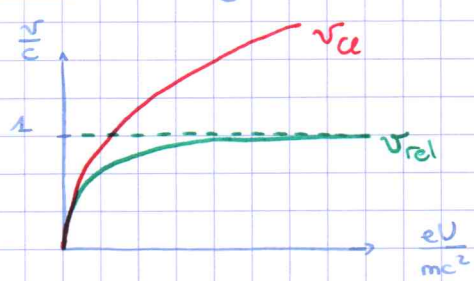
$mc^2 = 0,9 \cdot 10^{-30} \times (3 \cdot 10^8)^2 = 80 \cdot 10^{-15} J$
 $= 5 \cdot 10^5 eV$
 $= 0,5 MeV$

$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{eU}{mc^2}\right)^2}}$

\bullet $eU \ll mc^2 \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2eU}{mc^2}\right)} = \sqrt{\frac{2eU}{mc^2}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$

cohérent

③ $eU \gg mc^2$ $\frac{v}{c} \rightarrow 1^-$ compatible avec relativité restreinte



IV - Equations de Poisson et de Laplace

1. Equation de Poisson en présence de charges

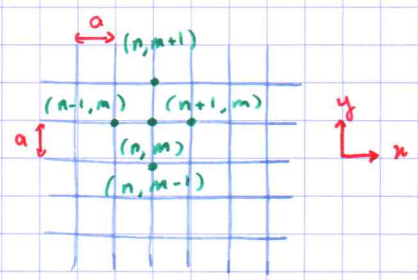
$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot } \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E} = -\text{grad } V \end{cases} \quad \text{donc } -\frac{\text{div}(\text{grad } V)}{\Delta V} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V(\vec{r}) + \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} = 0} \quad \text{Eq. de Poisson (Locale)}$$

2. Equation de Laplace en l'absence de charges

$\rho(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta V(\vec{r}) = 0}$ Equation de Laplace

④ Principe de la résolution numérique de $\Delta V = 0$
 → pb plan $V(x,y)$: maillage carré $a \times a$



$$V(x,y) \rightarrow V(x_n = na, y_n = ma) = V_{n,m}$$

$$V_{n+1,m} = V_{n,m} + a \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{n,m} + \frac{a^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_{n,m} + O(a^3)$$

$$V_{n,m+1} = V_{n,m} + a \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{n,m} + \frac{a^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_{n,m} + O(a^3)$$

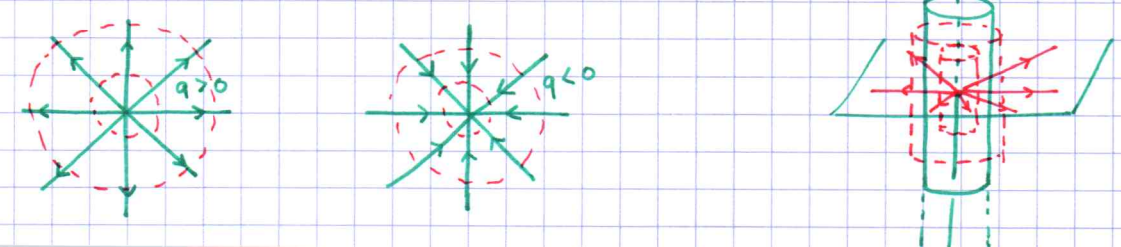
$$V_{n+1,m} + V_{n-1,m} + V_{n,m+1} + V_{n,m-1} = 4V_{n,m} + 0 + a^2 \left(\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_{n,m} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_{n,m} \right) + O(a^4)$$

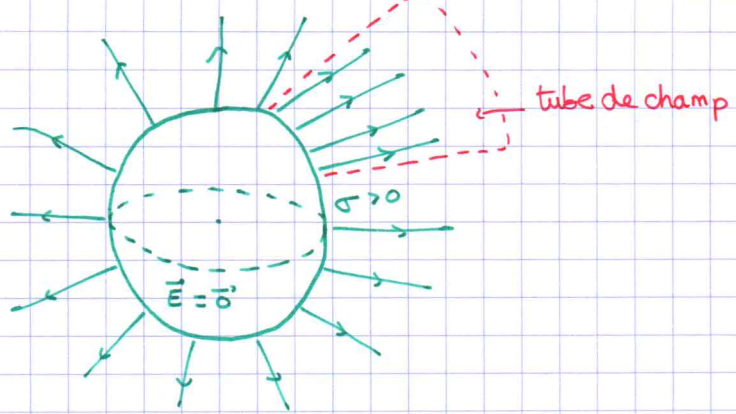
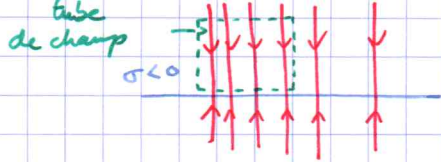
$$\Rightarrow V_{n,m} = \frac{V_{n+1,m} + V_{n-1,m} + V_{n,m+1} + V_{n,m-1}}{4} \quad \text{à l'ordre 4 près.}$$

V - Topographie du champ électrostatique

1. Lignes de champ / tubes de champ \leftrightarrow tubes de courant

lignes de courant \nearrow courbe tangente en tout point à \vec{E} orientée selon \vec{E} \searrow ensemble de la l.c. s'appuyant sur un contour fermé





2. Surfaces équipotentielles

(a) Définition: Surface équipot. (S) : $\forall h \in (S), V(h) = \text{cste}$

$$\Leftrightarrow dV = 0 \text{ pour un petit déplacement } d\vec{l} // (S)$$

$$\Leftrightarrow \text{grad } V \cdot d\vec{l} = 0$$

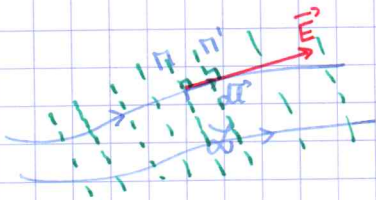
$$\Leftrightarrow \vec{E} \perp d\vec{l}$$

Les ldc de \vec{E} et les surfaces équipotentiels sont \perp entre elles.

(b) Orientation des ldc

Soit \mathcal{L} , ldc

$d\vec{l}$: déplacement élem. le long de \mathcal{L}
 \hookrightarrow orienté selon \vec{E} .

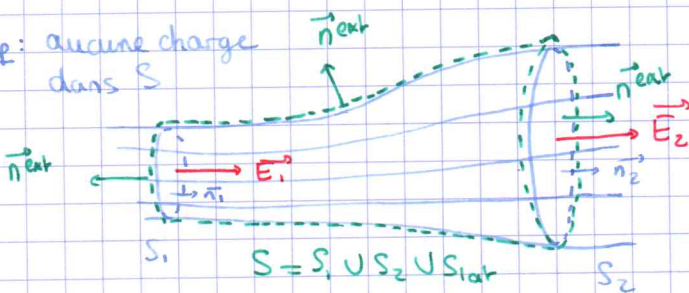


$$\underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{l}}_{> 0} = -\text{grad } V \cdot d\vec{l} = -\frac{dV}{< 0} \text{ donc } V(h') < V(h)$$

Les ldc sont orientées dans le sens des $V \downarrow$
 " \vec{E} descend les potentiels "

3. Evasement ou resserrement d'un tube de champ.

Hyp: aucune charge dans S



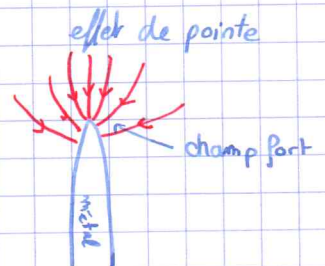
$$\text{Gauss: } \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1^{\text{ext}} dS_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2^{\text{ext}} dS_2 + \iint_{S_{\text{lat}}} \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}}}_0 dS = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1^{\text{ext}} dS_1 = \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2^{\text{ext}} dS_2$$

$$\rightarrow \text{en OG: } E_1 S_1 \neq E_2 S_2 \Rightarrow E_2 \neq E_1 \times \frac{S_1}{S_2}$$

$$\begin{cases} \text{évasement: } S_2 > S_1 \Rightarrow E_2 < E_1 \\ \text{resserrement: } S_2 < S_1 \Rightarrow E_2 > E_1 \end{cases}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ldc serrées} \Leftrightarrow \|\vec{E}\| \text{ gd} \\ \text{ldc écartées} \Leftrightarrow \|\vec{E}\| \text{ faible} \end{array} \right.$



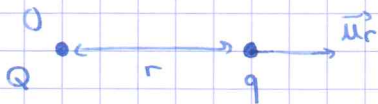
4 - Cartes de lignes de champ et d'équipotentiels

voir docs

VI - Analogies avec la gravitation universelle

1 - Les deux lois de forces - Grandeurs analogues

Electrostatique



$$\vec{F}_{el} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{u}_r$$

attractive
ou répulsive

Gravitation



$$\vec{F}_g = - \frac{\gamma Mm}{r^2} \vec{u}_r$$

attractive

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

charge	↔	masse
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho$	↔	μ
	↔	$-\gamma$

$$(\vec{F}_{el} = q\vec{E}) \quad \vec{E} \leftrightarrow \vec{g} \quad (\vec{F}_g = m\vec{g})$$

2 - Equations locales de la gravitation

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot } \vec{E} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \text{div } \vec{g} = -4\pi\gamma\mu \\ \text{rot } \vec{g} = \vec{0} \end{cases}$$

3 - Théorème de Gauss gravitationnel - Champ de gravitation d'un astre à symétrie

sphérique

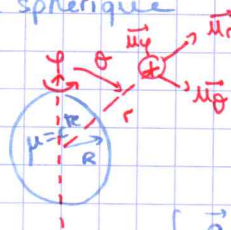
$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{ext} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\leftrightarrow \oint_S \vec{g} \cdot \vec{n}^{ext} dS = -4\pi\gamma M^{int}$$

4 - Champ de gravitation d'un astre à symétrie sphérique



$$Q = \rho \times \frac{4\pi}{3} R^3$$



$$M = \mu \times \frac{4\pi}{3} R^3$$

$$\begin{cases} \vec{E}(r \leq R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \times \frac{r}{R} \vec{u}_r \\ \vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{g}(r \leq R) = - \frac{\gamma M}{R^2} \times \frac{r}{R} \vec{u}_r \\ \vec{g}(r > R) = - \frac{\gamma M}{r^2} \vec{u}_r \end{cases}$$

4. Potentiel gravitationnel - Energie potentielle d'une masse plongée dans un champ extérieur

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$$

↔

$$\text{rot } \vec{g} = \vec{0}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

↔

$$\oint_C \vec{g} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

↔

$$\vec{g} = -\text{grad } \varphi$$

$m^2 \cdot s^{-2}$
↖ potentiel gravitationnel

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B)$$

↔

$$\int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{l} = \varphi(A) - \varphi(B)$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

↔

$$\varphi(r) = -\frac{GM}{r}$$

$$E_p = qV^{\text{ext}}$$

↔

$$E_p = m\varphi^{\text{ext}}$$

