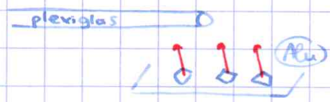
EM3 : CONDENSATEURS

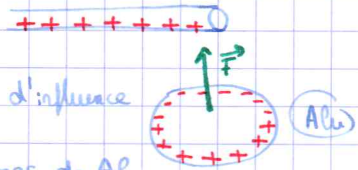
I – Phénomène d'influence électrostatique

1 – Condition d'équilibre électrostatique d'un conducteur

(a) Exp :



interp



phénomène d'influence

↓

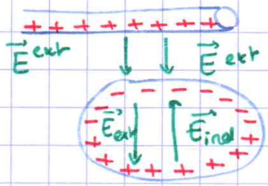
séparation des charges de Al.

(b) Condition d'éq. électrostatiq. d'1 conducteur

$\Updownarrow$

$\vec{j} = \vec{0}$ or $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ donc $\vec{E}(M) = \vec{0}$ $\forall M$ cond.

↳ condition d'éq. électrostatique



$\vec{E}_{tot} = \vec{E}^{ext} + \vec{E}_{ind} = \vec{0}$ ds le cond.

• Conséquences

(i) $\vec{E} = \vec{0} = -\overrightarrow{grad}\, V$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{array}\right\} \text{ds le cond} \Rightarrow V(M) = \text{cste dans le conducteur}$$

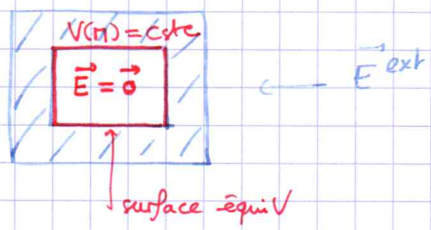
Le conducteur est équipotentiel

(ii) $\rho(M) = \varepsilon_0\, div(\vec{E}) = 0$ → pas de charges volumiques ds 1 cond à l'éq

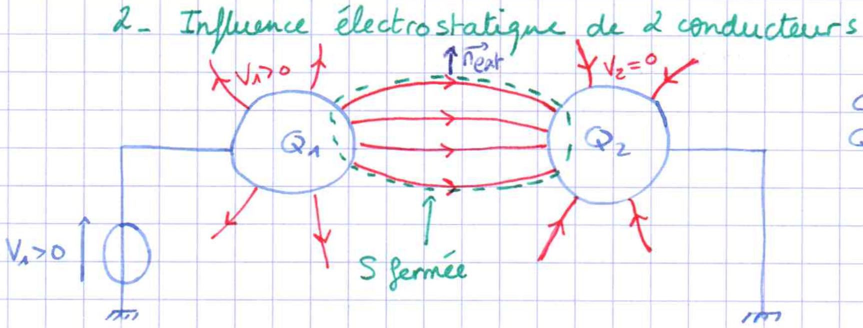
$\rho(M) = 0$

→ seules charges susceptibles d'apparaître : charges en surface $\sigma(M) \neq 0$

• Application : blindage électrostatique



2 – Influence électrostatique de 2 conducteurs



$Q_1 > 0$
$Q_2 < 0$

linéarité :

$Q_1 = \alpha V_1$ $\quad \alpha > 0$
$Q_2 = \beta V_1$ $\quad \beta < 0$

Théorème de Gauss à S :

$$\oiint_S \vec{E}.\vec{n}^{ext}\, dS = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\iint_{S_1} \vec{E}.\vec{n}^{ext}\, dS_1 + \iint_{S_2} \vec{E}.\vec{n}^{ext}\, dS_2 + \iint_{S_{lat}} \overbrace{\vec{E}.\vec{n}^{ext}}^{0}\, dS$$

donc $Q^{int} = 0 = \delta Q_1 + \delta Q_2$ (charges en surfaces)

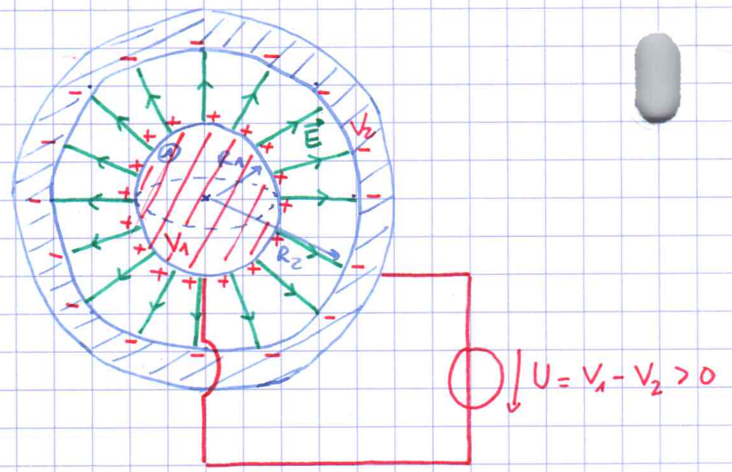
$\delta Q_2 = -\delta Q_1$ Théorème des éléments correspondants mais $Q_2 \neq -Q_1$ influence partielle des 2 cond : certaines ldc vont de l'un à l'autre

3_ Influence totale : effet condensateur

ex : condensateur sphérique

Le champ $\vec{E}$ est confiné entre les conducteurs ("armatures")

→ c'est l'effet condensateur



Les 2 surfaces conductrices en regard sont en influence TOTALE
(toutes les ldc issues de l'une arrivent sur l'autre)

$\Rightarrow \quad Q_2 = -Q_1$

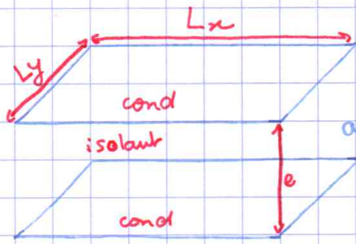
Définition : capacité

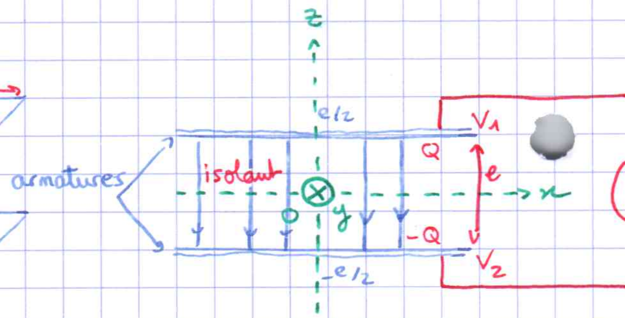
$$\boxed{Q_1 = C\,(V_1 - V_2)} = -Q_2$$

↑
F

II_ Condensateurs plans sans effets de bord

1_ Modèle

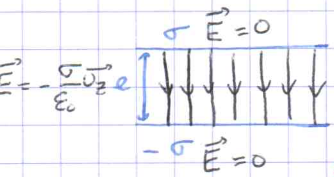




Hypo : $e \ll L_x$ et L_y
⇓
armatures "∞"
↳ pas d'effets de bord
↳ les 2 armatures sont en influence totale

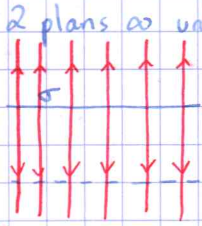
2_ Champ électrique

(a) Méthode 1 : 2 armatures = 2 plans ∞ unif^t chargés en surface $\pm\sigma = \pm\frac{Q}{S}$ $(S = L_x L_y)$



⟺

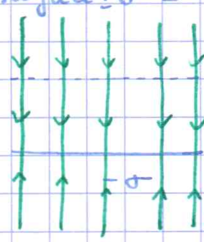
$z > \frac{e}{2}$: $\vec{E_1} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$



$z < \frac{e}{2}$: $\vec{E_1} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$

+

$\vec{E_2} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$

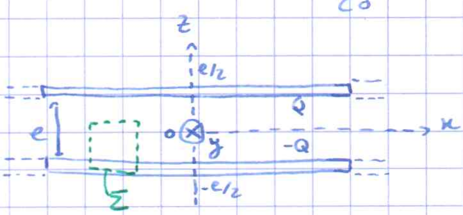


$\vec{E_2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$

(th de superp)

Bilan : $\vec{E}_{ext} = \vec{0}$ $\qquad \vec{E}_{int} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z} = -\frac{Q}{S\varepsilon_0}\vec{u_z}$ champ uniforme

(b) Méthode 2 :



● Géométrie : → ∀M (M, x, z) et (M, y, z) PS
$\Rightarrow \vec{E} \parallel \vec{u_z}$
Invariance par transl. // à $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$:
$\vec{E} = E(z)\,\vec{u_z}$

● Gauss : $\oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{n}^{ext}\,d\Sigma = E(z)\times\Sigma - 0\times\Sigma = -\frac{\sigma\Sigma}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E(z) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ pour $z \in \left]-e/2, e/2\right[$

$\rightarrow |z| > \frac{e}{2}$: $\oiint \vec{E}\cdot\vec{n}^{ext}\,d\Sigma = E(z)\times\Sigma - 0\times\Sigma = \frac{\sigma\Sigma - \sigma\Sigma}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow E(|z| > \frac{e}{2}) = 0$

(c) Prise en compte de l'isolant

↳ pas les prop électstat du vide

$\varepsilon_0 \longrightarrow \varepsilon_0 \varepsilon_r$ mais comportement linéaire

| constante permittivité | diélectrique du vide

ε_r sans dim

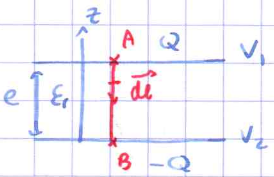
→ les éq^n de l'électrostatique deviennent dans l'isolant :

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \iff \displaystyle\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}^{ext}\,dS = \dfrac{Q^{int}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \\ \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \iff \vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}\,V \iff \displaystyle\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = V(A) - V(B) \end{cases}$$

⇒ ts les résultats précédents sont inchangés (avec ε_r).

Pour un condensateur plan ∞ à isolant (ε_r)
$$\begin{cases} \vec{E}_{int} = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\vec{u_z} = -\dfrac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}\vec{u_z} \\ \vec{E}_{ext} = \vec{0} \end{cases}$$

3 - Capacité



$$C \triangleq \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

$$\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = V_A - V_B = V_1 - V_2$$

$U = V_1 - V_2$

$$\int_A^B -\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\vec{u_z}\,(-dl\,.\,\vec{u_z}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\times e = \frac{Qe}{S\varepsilon_0\varepsilon_r} = V_1 - V_2$$

$$\Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{e}$$

OG : $\varepsilon_r \sim$ qq unités
$S \sim$ qq $10\,cm^2$
$e \sim 100\,\mu m$

$C \# 10^{-9}\,F \sim 1\,nF$

- Autre expression de $\vec{E}$: $\vec{E} = -\dfrac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}\vec{u_z} = -\dfrac{V_1 - V_2}{e}\vec{u_z}$

4 - Réalisation pratique - Choix de l'isolant

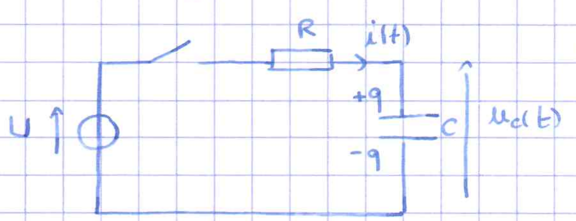
pour ↗ C :
- ↗ S : enroulement ou multicouches
- ↘ e : mais risque de claquage de l'isolant
- ε_r ↗

OG ε_r :

papier :	4-5	
mica :	5-6	
polyester :	3	
céramiques :	$CaTiO_3$	100
	$BaTiO_3$	10^4

III - Aspect énergétique

1 - Energie stockée lors de la charge d'un condensateur



→ rég. transitoire : $i(t) = \dfrac{dq}{dt} > 0$ et $q(t) = C\,u_c(t)$

$$\delta\mathcal{E}_{es} = u_c(t)\,i(t)\,dt = \frac{q(t)}{C}\,dq = d\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{C}\right)$$

$$\mathcal{E}_{es} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2$$

énergie stockée lors de la charge

2_ Continuité de Q et u_c

Si discontinuité de q et u_c, l'én. stockée est discontinue $\Rightarrow$ puissance ∞ !

$\Rightarrow$ variations CONTINUES de q et u_c

3_ Densité volumique d'énergie électrique

(a) Cas du condensateur plan ss effet de bord

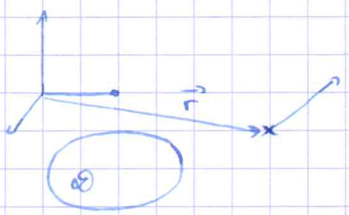
$$\mathcal{E}_{es} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{e} U^2 \quad \text{donc} \quad \mathcal{E}_{es} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2} \times \|\vec{E}\|^2 \times \underbrace{(Se)}_{\mathcal{V}}$$

énergie du champ $\vec{E}$ par unité de volume

(b) Généralisation (cas du vide)

$\rightarrow$ soit $\mathcal{D}$ distribution de charges qcq créant $\vec{E}(\vec{r})$ en tout pt de l'espace vide

- Postulat : l'énergie de constitution de $\mathcal{D}$ est localisée dans son champ $\vec{E}$ (et non de ses charges)



$$\mathcal{E}_{es}(\mathcal{D}) = \iiint_{\text{tout l'espace}} \frac{\varepsilon_0 E^2(\vec{r})}{2} \cdot \delta\mathcal{V}$$

ex : évaluation du rayon de l'e^- en fonction de ε_0, m, e, c

modèle : boule unif^t chargée en volume

$$-e = \rho \times \frac{4\pi}{3} R^3$$

$$\begin{cases} \vec{E}(r \geq R) = -\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u_r} \\ \vec{E}(r \leq R) = -\dfrac{e r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \vec{u_r} \end{cases}$$

- Energie électstat de l'e^-

$$\mathcal{E}_{es} = \iiint_{l'esp} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \delta\mathcal{V} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_0^R \frac{e^2 r^2}{(4\pi\varepsilon_0 R^3)^2} \cdot 4\pi r^2 dr + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_R^{+\infty} \frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = mc^2$$

$$\Rightarrow R = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\mu_0 e^2}{4\pi m} \# 2.10^{-15}\,m = 2\,fm$$