

# EMS: ÉLECTROMAGNÉTISME

## DANS L'ARQS MAGNÉTIQUE

### I. Les équations de Maxwell

AND GOD SAID...

#### 1. Les équations de Maxwell locales

lien entre  $[\vec{E}, \vec{B}]$  et ses sources  $[\rho, \vec{j}]$

équations de structures

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad \text{Maxwell-Gauss}$$

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{Maxwell-Thompson}$$

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\vec{r}, t)$$

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{r}, t) \quad \text{Maxwell-Faraday}$$

Maxwell-Ampère

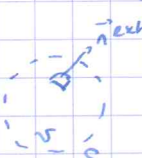
$$\oplus \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

... AND THERE WAS LIGHT!

#### 2. Les équations de Maxwell intégrales

lien entre  $[\vec{E}, \vec{B}]$  et ses sources


ég. de structures



$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q_{\text{int}}(t)}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0$$

th. de Gauss



$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = - \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{r}, t) \cdot \vec{N} d\Sigma$$

$$= - \frac{d}{dt} \left[ \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{N} d\Sigma \right]$$

loi de Faraday

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{N} d\Sigma + \mu_0 \epsilon_0 \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{N} d\Sigma$$

théorème d'Ampère généralisé

#### 3. Propriétés et conséquences essentielles

(a) Linéarité  $\Rightarrow$  th. de superposition

(b) Invariance de c par changement de réf galiléen

2 ctes fond :

$$\begin{cases} \epsilon_0 \rightarrow \text{F.m}^{-1} \\ \mu_0 \rightarrow \text{H.m}^{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} [\epsilon_0 \mu_0] = \frac{\text{H.F.m}^{-2}}{\text{s}^2} \\ [\epsilon_0 \mu_0] = \frac{1}{(\text{vitesse})^2} \end{cases} \quad \leadsto \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

$$\mu_0 \hat{=} 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$$

$$c \hat{=} 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

### Principe de relativité

toutes les lois de la Y sont invariantes par changement de référentiel galiléen.

↳ donc celles de l'ém.

⇒ c est invariante par changement de référentiel galiléen.

(c) Double couplage des variations de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  (régime variable, pas régime stat)

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{---> ondes ém.}$$

## II - Equation de Maxwell-Ampère et l'ARQS magnétique

### 1. Densité de courant de déplacement et conservation de la charge

⊙ l'Ampère statique incompatible avec conservation de la charge en régime variable

$$\text{div} (\text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)) \Rightarrow 0 = \mu_0 \text{div } \vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$\text{or } \text{div } \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 \text{ a priori}$$

⇒ incompatibilité

⊙ démarche de Maxwell

$$\text{div} (\text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 [\vec{j}(\vec{r}, t) + \vec{?}]) \Rightarrow \text{div } \vec{?} = - \text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\text{or } \rho = \epsilon_0 \text{div } \vec{E}$$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{?} = \text{div} (\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad \text{donc} \quad \vec{?} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

→ terme prévoyant l'existence des ondes électromagnétiques

densité de courant de déplacement

### 2. ARQS magnétique

(a) Définition de l'ARQS magnétique → effet des charges négligeables devant effets des courants

$$\Delta t_{\text{propa}} \ll \Delta t_{\text{évo}} \quad \Delta t_{\text{propa}} \neq \frac{L}{c} \Rightarrow \frac{L}{c} \ll \Delta t_{\text{évo}}$$

↓  
on compare  $\|\vec{j}\|$  et  $c|\rho|$

si RSF:  $\Delta t_{\text{évo}} = T$  donc  $L \ll cT$  i.e.  $L \ll \lambda$ .

$$\|\vec{j}\| \gg c|\rho|$$

99% des cas car les conducteurs sont neutres  
exception: condensateurs.

⊙ Conséquence sur MA:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\|\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\vec{j}\|} \neq \frac{\epsilon_0 \frac{\|\vec{E}\|}{\Delta t_{\text{évo}}}}{\|\vec{j}\|}$$

$$\text{or } \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{i.e.} \quad \frac{\|\vec{E}\|}{L} \neq \frac{|\rho|}{\epsilon_0}$$

$$\neq \frac{|\rho| \times L}{\Delta t_{\text{évo}} \|\vec{j}\|} \neq \frac{c|\rho|}{\|\vec{j}\|} \times \frac{L}{c \Delta t_{\text{évo}}} \ll 1$$

$\frac{L}{c \Delta t_{\text{évo}}} \ll 1$   
 $\frac{\Delta t_{\text{propa}}}{\Delta t_{\text{évo}}} \ll 1$

donc  $\text{rot } \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j}$  ARQS magn.

● OG:  $f = 50 \text{ Hz} \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{50} = 6000 \text{ km} \rightarrow \text{ARQS OK (} L \ll \lambda \text{)}$   
 $f = 1 \text{ MHz} \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^6} = 300 \text{ m}$

$\rightarrow$  TP élec classique: ARQS OK  
 $\rightarrow$  TP Coax 100m: pas ARQS

(b) Champ  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  dans l'ARQS magnétique

$$\begin{cases} \text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \\ \text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \oint_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{m}^{\text{ext}} dS = 0 \\ \oint_C \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{int}}(t) \end{cases}$$

Le champ  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  de l'ARQS magnétique est le même qu'en magnétostatique, mais "à chaque instant"

● et  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ? le + souvent: conducteurs neutres:  $\rho(\vec{r}, t) = 0$

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 & \text{non créé par des charges} \\ \text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{E} \text{ induit par les var. temp. de } \vec{B} \end{cases}$$

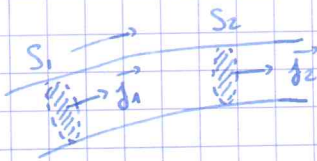
Dans l'ARQS magnétique,  $\vec{E}$  est donné par la loi de Faraday (pas par le th. de Gauss)

(c) Loi des nœuds dans l'ARQS magnétique

$$\text{div}(\text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) \approx \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)) \Rightarrow \text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{ARQS magn.}$$

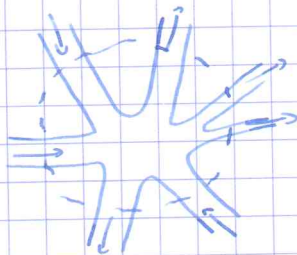
$$\oint_S \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{m}^{\text{ext}} dS = 0 \quad \vec{j} \text{ à flux conservatif}$$

$\Rightarrow$  (i)



$$i_1 = i_2 = i(t) \quad (\text{ARQS magn})$$

(ii)



$$\sum_k i_k(t) = 0 \quad \text{loi des nœuds}$$

### III - L'équation de Maxwell-Faraday ou l'induction de Neumann

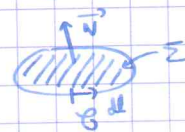
conducteur fixe de  $\vec{B}$  dépendant de t

1. Loi de Faraday et fém d'induction

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = - \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \Rightarrow \oint_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{N} d\vec{\Sigma} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{N} d\vec{\Sigma}$$

loi de Faraday

$$\oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_M}{dt} \neq 0$$

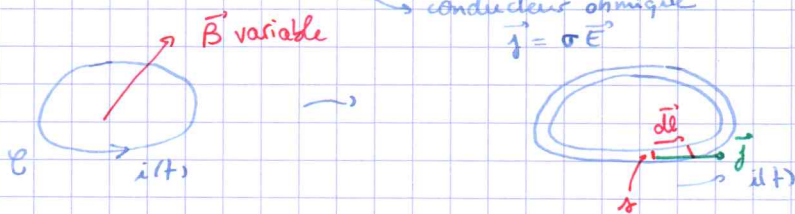


NB: en rég. variable,  $\vec{E}$  n'est pas d' circulation conservative donc  $\vec{E} \neq -\text{grad } V$

Notion de fem induite dans 1 circuit filiforme fermé

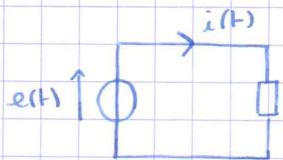
$\mathcal{C}$  = circuit filiforme fermé, parcouru par  $i(t)$

$\vec{B}$  variable  
conducteur ohmique  
 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$



$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{j} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\sigma} \oint_{\mathcal{C}} i(t) \cdot dl = \left(\frac{l}{\sigma S}\right) \times i(t)$$

or  $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_m}{dt} = e(t)$  loi de Faraday



$e(t) = Ri(t)$

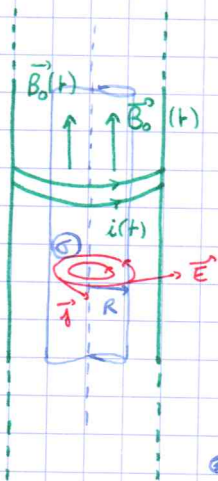
$$e(t) = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

2. Les équations locales de l'induction

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \\ \text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = - \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \Leftrightarrow e(t) = - \frac{d\Phi_m}{dt} \text{ FARADAY} \\ \text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \\ \text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) \Leftrightarrow \text{théorème d'Ampère} \end{cases}$$

$\oplus \vec{j} = \sigma \vec{E} \Leftrightarrow u = Ri \text{ Ohm}$

3. Inducteur dans un conducteur fixe, "massif" mais "mince" - Chauffage par induction.



(a) Principe:  $i(t)$  Ampère  $\vec{B}_0(t) \Rightarrow \vec{E}_1(\vec{r}, t)$ : champ élec induit PARTOUT  
 $\Downarrow$  Ohm

Hypo: on néglige le champ  $\vec{B}_1(\vec{r}, t)$  créé par  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  devant  $\vec{B}_0(\vec{r}, t)$

$\vec{j}(\vec{r}, t)$  ds le conducteur: courants de FOUCAULT  
 $\Downarrow$  Joule

$\rho_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 > 0$

(b) Calcul du champ  $\vec{E}_1$  induit:

Symétries:  $\forall \theta, (\theta, \vec{u}_r, \vec{u}_z) = \text{PAS}$  pr les courants

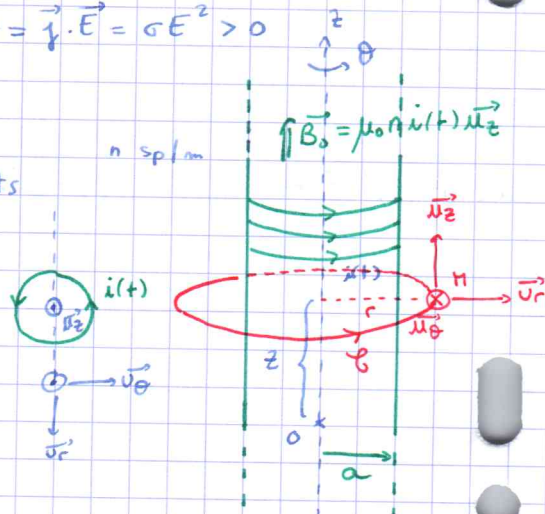
$\Rightarrow \vec{E}(r, \theta, z, t) \parallel \vec{u}_\theta$

$\vec{E}(r, \theta, z, t) = E(r, \theta, z, t) \cdot \vec{u}_\theta$

Invariances: sym de révo d'axe  $Oz$  + inv. par transl //  $Oz$

$\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial E}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow \vec{E}(r, t) = E(r, t) \vec{u}_\theta$



Contour de Faraday:  $\rightarrow \vec{E} \parallel d\vec{l}$  en  $\mp r^t$   
 $\rightarrow \|\vec{E}\| = \text{cte}$  le long de  $\mathcal{C}$

Loi de Faraday:  $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_m}{dt}(r, t)$

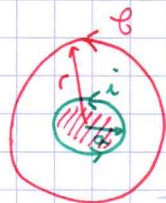
or  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint E(r,t) \vec{u}_\theta \cdot d\vec{l} \vec{u}_\theta = 2\pi r E(r,t)$   
 $\Rightarrow 2\pi r E(r,t) = - \frac{d\Phi_m(r,t)}{dt}$

(i)  $r \leq a$

$\Phi_m(r \leq a) = \oplus B_0(t) \pi r^2 \Rightarrow \vec{E}(r \leq a, t) = - \frac{r}{2} \frac{dB_0}{dt} \vec{u}_\theta$



(ii)  $r \geq a$



$\vec{E}(r \geq a, t) = - \frac{\mu_0 i}{2} \frac{di}{dt} r \vec{u}_\theta \propto r$

$\Phi_m(r \geq a, t) = \oplus B_0(t) \pi a^2$

$\Rightarrow \vec{E}(r \geq a, t) = - \frac{a^2}{2r} \frac{dB_0}{dt} \vec{u}_\theta$

$\vec{E}(r \geq a, t) = - \frac{\mu_0 i a^2}{2} \frac{di}{dt} \times \frac{1}{r} \vec{u}_\theta \propto \frac{1}{r}$

(c) Courants de Foucault induits et puissance dissipée par effet Joule

• Dans le conducteur :

$\vec{E}(r,t) = - \frac{r}{2} \frac{dB_0}{dt} \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{j}(r,t) = - \frac{\sigma r}{2} \frac{dB_0}{dt} \vec{u}_\theta$  courants de Foucault

• Par unité de volume :

$p_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 = \frac{\sigma}{4} \left( \frac{dB_0}{dt} \right)^2 r^2$

donc  $P_J(t) = \iiint_{\text{vol. du cond}} p_{\text{vol}}(r,t) \frac{\delta V}{2\pi r dr} = \frac{\pi \sigma h}{2} \left( \frac{dB_0}{dt} \right)^2 \int_0^R r^3 dr$

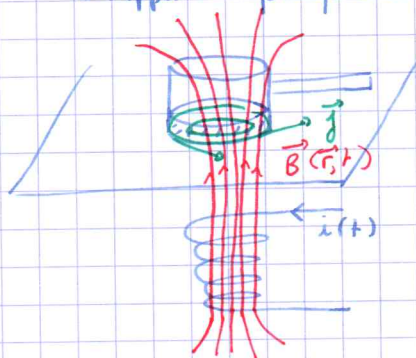
$P_J(t) = \frac{\pi \sigma h R^4}{8} \left( \frac{dB_0}{dt} \right)^2$

• En RSF :  $i(t) = I \cos(\omega t) \Rightarrow B_0(t) = \mu_0 n I \cos(\omega t)$

$\left( \frac{dB_0}{dt} \right)^2 = (\mu_0 n I \omega)^2 \sin^2(\omega t)$

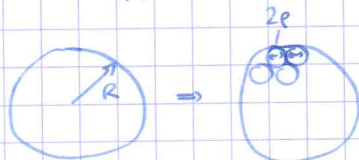
donc  $\langle P_J \rangle = \frac{\pi (\mu_0 n I)^2 h}{16} (\sigma R^4 \omega^2) \propto I^2$   
 $\propto \sigma$   
 $\propto R^4$   
 $\propto \omega^2$

• Appli 1 : plaque à induction



réglage de la puissance via la fréquence

• Appli 2 : limitation de pertes Joules et feuilletage



$\pi R^2 = N \pi p^2 \Rightarrow N = \left( \frac{R}{p} \right)^2$

Pour les N cond de rayon p,

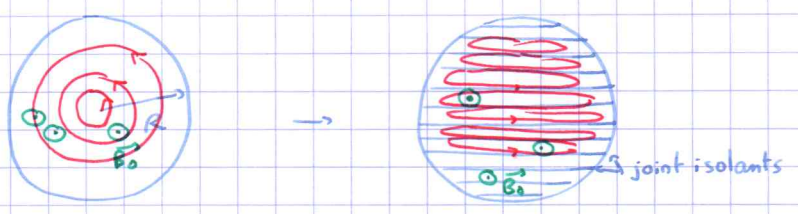
$\langle P_J(p) \rangle = c \sigma \pi p^4$

$\langle P_J(N,p) \rangle = N \langle P_J(p) \rangle = N \times c \sigma \pi p^4$

$\langle P_J(R) \rangle = c \sigma \pi R^4$

$\frac{\langle P_J(N,p) \rangle}{\langle P_J(R) \rangle} = \frac{N p^4}{R^4} = \frac{1}{N} \ll 1$

→ en pratique :



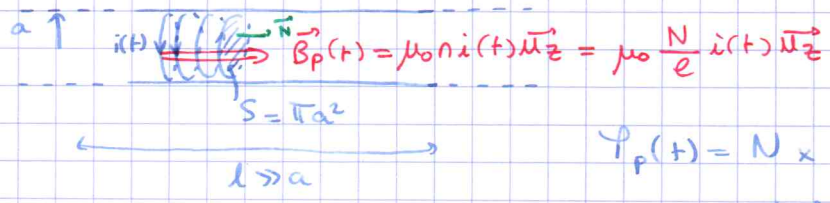
### 4 - Autoinduction dans un circuit filiforme

(a) Inductance propre L

ex: solénoïde parcourue par  $i(t)$

flux propre

→ "Mécanisme":  $i(t) \xrightarrow{\text{Ampère}} \vec{B}(t) \rightarrow \Psi_p(t) \xrightarrow{\text{Faraday}} e = - \frac{d\Psi_p}{dt}$



$$\Psi_p(t) = N \times \Psi_{\text{spire}} = N \times B_p S = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \times i(t)$$

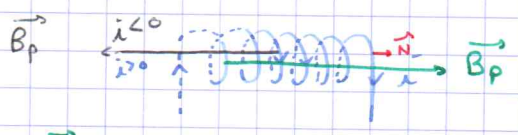
→ Déf: inductance propre L déf par  $\Psi_p = Li$  ici:  $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \propto N^2$

OG:  $\begin{cases} N = 1000 \\ l = 20 \text{ cm} \\ a = 5 \text{ cm} \end{cases}$

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \times 10^6 \cdot \pi \cdot 25 \cdot 10^{-4}}{0,2} \approx 50 \text{ mH}$$

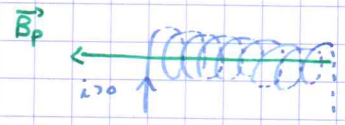
(b) Propriétés de L

- L ne dépend que de la géométrie du circuit
- $L > 0$  toujours



$$\Psi_p > 0 \text{ et } i > 0 \Rightarrow L > 0$$

$$\Psi_p < 0 \text{ et } i < 0 \Rightarrow L > 0$$



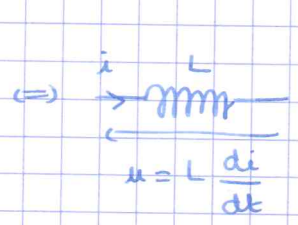
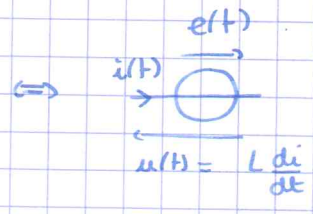
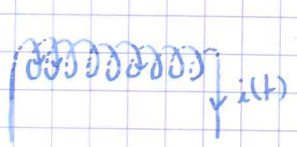
$$\Psi_p > 0 \text{ et } i > 0 \Rightarrow L > 0$$

•  $L \propto N^2 \Rightarrow$  phénomène d'autoinduction localisé ds les circuit bobinés

(c) Fem autoinduite et schéma électrique équivalent

$$e = - \frac{d\Psi_p}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad \text{orientée ds le sens de } i$$

bobine idéale

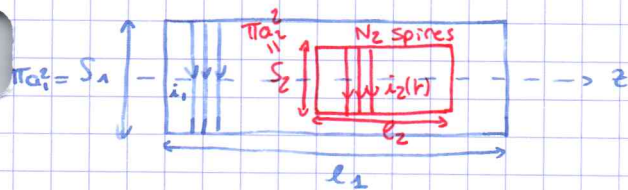


$|\frac{di}{dt}| \text{ gd} \Rightarrow$  forte tension

# 5. Inductance mutuelle entre deux circuits filiformes

## (a) Inductance mutuelle

ex: 2 solénoïdes emboîtés



① crée  $\vec{B}_1(r < a_1, t) = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} i_1(t) \vec{u}_z$

② crée  $\vec{B}_2(r < a_2, t) = \mu_0 \frac{N_2}{l_2} i_2(t) \vec{u}_z$

⊙  $\frac{di_1}{dt} \neq 0 \Rightarrow \frac{d\vec{B}_1}{dt} \neq \vec{0} \Rightarrow \frac{d\varphi_{1 \rightarrow 2}}{dt} \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{dans ②}} \quad \varphi_{1 \rightarrow 2}(t) = - \frac{d\varphi_{1 \rightarrow 2}}{dt} \neq 0 \quad \left. \begin{array}{l} \propto \frac{di_1}{dt} \\ \text{induction mutuelle} \end{array} \right\}$

⊙ réciproquement  $\frac{di_2}{dt} \Rightarrow \varphi_{2 \rightarrow 1}(t) = - \frac{d\varphi_{2 \rightarrow 1}}{dt} \propto \frac{di_2}{dt}$

⊙  $\varphi_{1 \rightarrow 2}(t) = \iint_{N_2 \text{ spires de ②}} \vec{B}_1 \cdot \vec{N}_2 dS_2 = N_2 \times \iint_{1 \text{ spire de ②}} B_1 dS_2 = N_2 S_2 B_1(t) = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{l_1} i_1(t)$

⊙  $\varphi_{2 \rightarrow 1}(t) = \iint_{N_1 \text{ spires de ① plongées ds } B_2} \vec{B}_2 \cdot \vec{N}_1 dS_1 = N_1 \times \frac{l_2}{l_1} \times \iint_{1 \text{ spire de ②}} B_2 dS_1 = N_1 \frac{l_2}{l_1} S_2 \times \mu_0 \frac{N_2}{l_2} i_2(t)$

$\varphi_{1 \rightarrow 2}(t) = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{l_1} i_2(t)$

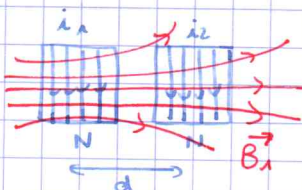
### ⊙ Définition - Généralisation

$$\begin{cases} \varphi_{1 \rightarrow 2} \hat{=} M_{12} \\ \varphi_{2 \rightarrow 1} \hat{=} M_{21} \end{cases}$$

→ Remarque  $M = \frac{\varphi_{1 \rightarrow 2}}{i_1} = \frac{\varphi_{2 \rightarrow 1}}{i_2}$

## (b) Propriétés de M

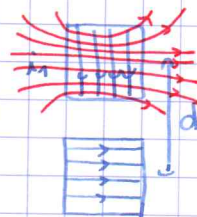
- M dépend de la géométrie de chacun des circuits relative de l'ensemble des 2 (orientation relative, distance mutuelle)



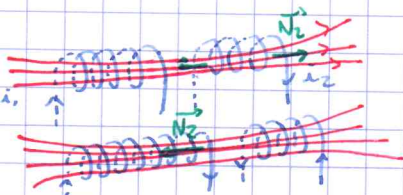
$\varphi_{1 \rightarrow 2} > 0$  notable

M "élevé"

⊙ le signe de M est quelconque



$\varphi_{1 \rightarrow 2} \approx 0 \quad M \approx 0$

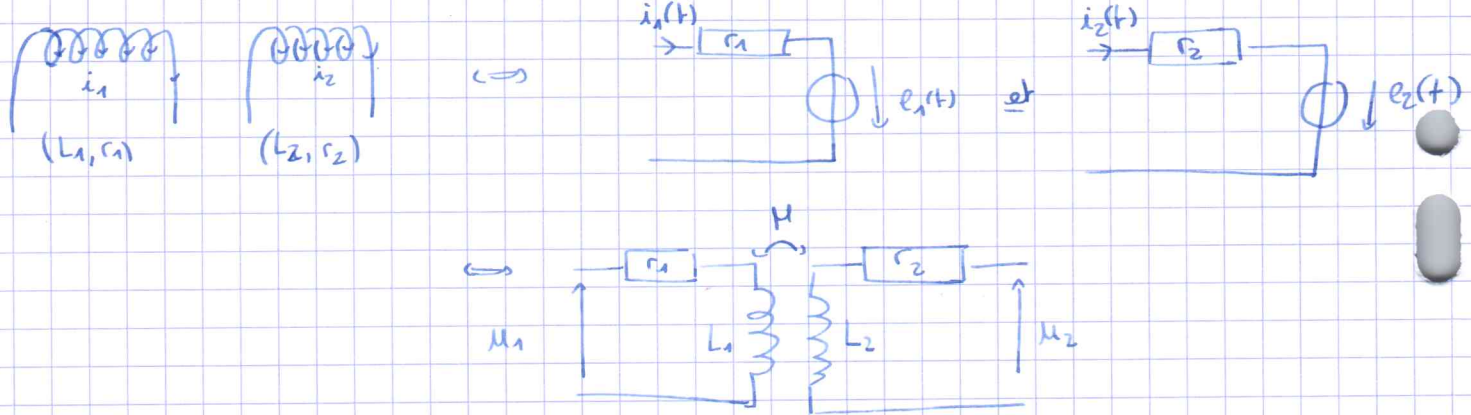


$\vec{B}_1 \cdot \vec{N}_1 > 0 \Rightarrow \varphi_{1 \rightarrow 2} > 0 \Rightarrow M > 0$

$\vec{B}_1 \cdot \vec{N}_2 < 0 \Rightarrow \varphi_{1 \rightarrow 2} < 0$  or  $i_1 > 0$  donc  $M < 0$

- ⊙  $M \propto N_1 N_2 \Rightarrow$  phéno. d'induction mutuelle important entre deux circuits bobinés (en général négligeable sinon).

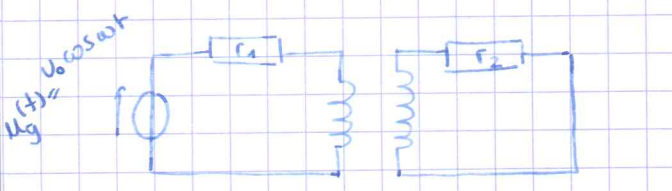
(c) Fem d'induction mutuelle et autoinduites ds 2 circuits bobines. Schéma elec. equivalent



$$e_1(t) = - \frac{d\psi_{11}^{tot}}{dt} = - \frac{d\psi_{1 \rightarrow 1}}{dt} - \frac{d\psi_{2 \rightarrow 1}}{dt} = - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$e_2(t) = - \frac{d\psi_{22}^{tot}}{dt} = - \frac{d\psi_{22}}{dt} - \frac{d\psi_{1 \rightarrow 2}}{dt} = - L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

(d) Application : detection par mutuelle



$$\begin{cases} U_g(t) = r_1 i_1 - e_1 = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = r_2 i_2 - e_2 = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

→ en RSF :

$$\begin{cases} \underline{U}_g = (r_1 + jL_1\omega) \underline{I}_1 + jM\omega \underline{I}_2 \\ \text{et } jM\omega \underline{I}_1 = -(r_2 + jL_2\omega) \underline{I}_2 \end{cases}$$

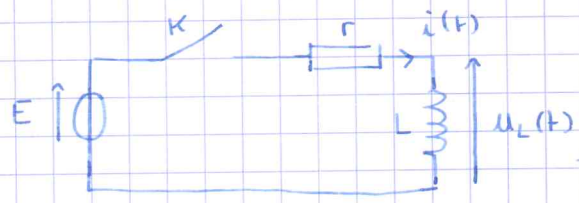
$$\Rightarrow \underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_g}{\underline{I}_1} = r_1 + jL_1\omega + jM\omega \frac{(-jM\omega)}{r_2 + jL_2\omega} = r_1 + jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{r_2 + jL_2\omega}$$

terme de couplage

$$\approx j(L_1 - \frac{M^2}{L_2})$$

IV - Energie magnetique

1 - Energie magnetique stockee lors de l'etablissement du courant dans 1 bobine



$t=0$  : on ferme  $K$   
 $\Rightarrow i(t) > 0$  et  $u_L(t) = L \frac{di}{dt}$   
 $\Rightarrow P(t) = u_L(t) i(t) = L \frac{di}{dt} \times i(t)$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{mag} = \int P(t) dt = L \int i di = d(\frac{1}{2} Li^2)$$

Energie stockee lors de l'etablissement du courant  $I$  :

$$E_{mag} = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi_P^2}{L} \quad (\Phi_P = LI)$$

2 - Continuite du courant et du flux pour un unique circuit bobine

↳ de l'energie, sinon puissance  $\infty$

$\Rightarrow i(t)$  et  $\Phi_P(t)$  ne peuvent etre discontinues



### 3. Densité d'énergie magnétique

(a) Exemple du solénoïde  $\omega$  (seul)

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z = \mu_0 \frac{N}{l} i \vec{u}_z \\ L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} \end{cases}$$

donc  $E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i^2$   
 $= \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 S}{l} \left( \frac{l B}{\mu_0 N} \right)^2 = \frac{B^2}{2 \mu_0} \times S l = \frac{B^2}{2 \mu_0} \times V$   $u_{\text{mag}}^{\text{vol}} = \frac{B^2}{2 \mu_0}$

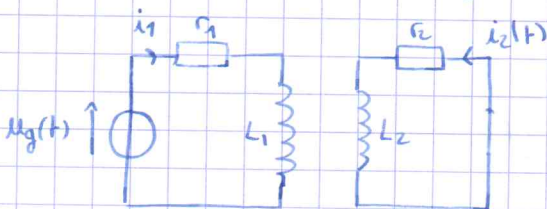
(b) Généralisation : Soit  $\mathcal{D}$  une distri. de courants (stat. ou ds ARQS mag) créant  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  en  $\# p^t$

Postulat l'énergie de la distribution de courants n'est pas localisée ds le courant mais ds le champ  $\vec{B}$  qu'elle crée :

$$E_{\text{mag}} = \iiint_{\text{tout l'espace}} \frac{B^2}{2 \mu_0} dV$$

### 4. Energie magnétique stockée lors de l'établissement du courant ds 2 circuits filiformes couplés par M.

(a) Energie mag. en fonction des courants



$$\begin{cases} (U_g(t) = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}) \times i_1 dt \\ (0 = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}) \times i_2 dt \end{cases} \quad (+)$$

$$\underbrace{U_g(t) i_1(t) dt}_{\text{SW}_{\text{géné}}} = \underbrace{r_1 i_1^2(t) dt + r_2 i_2^2(t) dt}_{\text{SW}_{\text{joule}}} + \underbrace{L_1 i_1 di_1 + M i_1 di_2 + L_2 i_2 di_2 + M i_2 di_1}_{d\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2\right)}$$

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

(NB)  $E_{\text{mag}}$  doit être continue  $\rightarrow$  possible si  $I_1$  et  $I_2$  subissent des discontinuités coordonnées

$t \leq 0$   $i_1 = I_1$  et  $i_2 = 0$   $E_{\text{mag}}(t \leq 0) = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$   
 ex:  $t = 0^+$  :  $i_1$  passe de  $I_1$  à 0, discontinûment  
 $\Rightarrow$  il faut que  $i_2$  passe brusquement de 0 à  $i_2 = \pm I_1 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$

(b) Expression de  $E_{\text{mag}}$  en fonction des champs magnétiques

$$E_{\text{mag}} = \iiint_{\# \text{ l'esp}} \frac{B^2}{2 \mu_0} dV \quad \text{or} \quad \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad (\text{H de sup})$$

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2 \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2$$

$$E_{\text{mag}} = \iiint_{\# \text{ l'esp}} \frac{B_1^2}{2 \mu_0} dV + \iiint_{\# \text{ l'esp}} \frac{B_2^2}{2 \mu_0} dV + \iiint_{\# \text{ l'esp}} \frac{\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2}{\mu_0} dV$$

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

## 5 - Couplage partiel, couplage total

⊙ Etablir des moments coûte de l'énergie

$$\Rightarrow E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \geq 0$$

$$X \equiv \frac{i_1}{i_2} \quad \downarrow$$

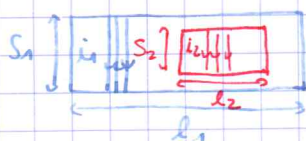
$$i_1^2 + \frac{2M}{L_1} i_1 i_2 + \frac{L_2}{L_1} i_2^2 \geq 0$$

$$X^2 + \frac{2M}{L_1} X + \frac{L_2}{L_1} \geq 0 \quad \Rightarrow \Delta \leq 0$$

$$\frac{4M^2}{L_1^2} - 4 \frac{L_2}{L_1} \leq 0 \quad \text{soit } M^2 \leq L_1 L_2 \quad \text{i.e. } |M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

- $M=0$  : aucun couplage
- $|M| = \sqrt{L_1 L_2}$  : couplage total
- $0 < |M| < \sqrt{L_1 L_2}$  : couplage partiel

ex: 2 solénoïdes emboîtés



$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2 S_1}{l_1}$$

$$L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2 S_2}{l_2}$$

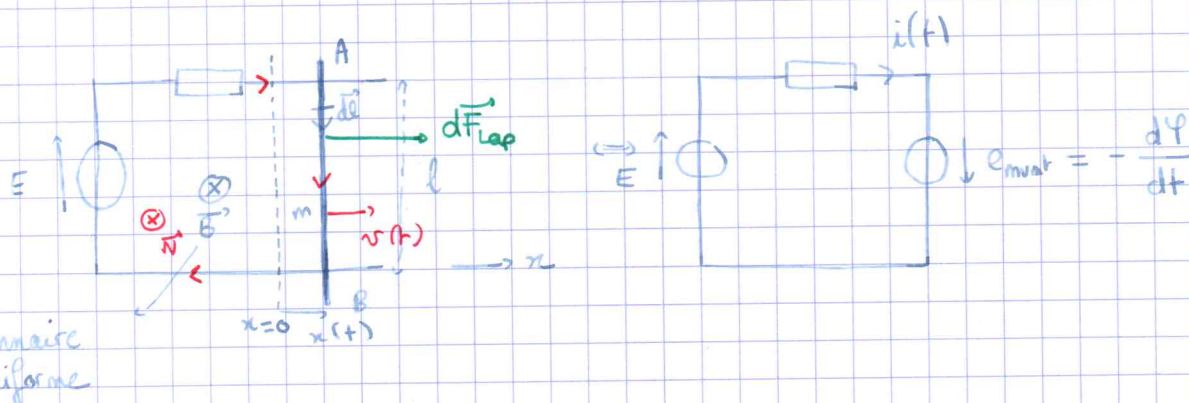
$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_2}{l_1}$$

$$\frac{M^2}{L_1 L_2} = \frac{l_2}{l_1} \frac{S_2}{S_1} < 1 \quad \text{couplage total si } l_1 = l_2 \text{ et } S_1 = S_2$$

## V - Induction de Lorentz : conducteur mobile plongé dans $\vec{B}$ stationnaire

### 1 - Exemple fondamental des rails Laplace

(a) Moteur



⊙ Equation électrique (E) :  $E = Ri(t) - e_{\text{mvt}}$  si  $e_{\text{mvt}} = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d(B \times l(x+l_0))}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv(t)$

$$\Rightarrow \boxed{E = Ri(t) + Blv(t)}$$

⊙ Equation mécanique (M) :  $e_{\text{mvt}} = -Blv(t)$

$$m \frac{dv}{dt} = F_{\text{Lap}} \quad \vec{F}_{\text{Lap}} = \int_A^B i(t) d\vec{l} \wedge \vec{B} = i(t) Bl i(t) \cdot \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \boxed{m \frac{dv}{dt} = Bl i(t)}$$

⊙ Résolution :  $m \frac{dv}{dt} = Bl \left( \frac{E - Blv(t)}{R} \right)$  i.e.  $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v(t) = \frac{BLE}{mR} = \frac{v_{\infty}}{\tau}$

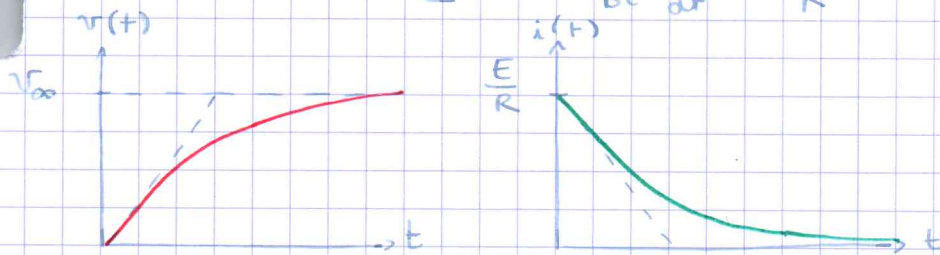
avec  $\tau = \frac{mR}{Bl^2}$

$$\boxed{v_{\infty} = \frac{E}{Bl}} \quad \text{CI} \quad v(0) = 0$$

$$v(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + v_{\infty}$$

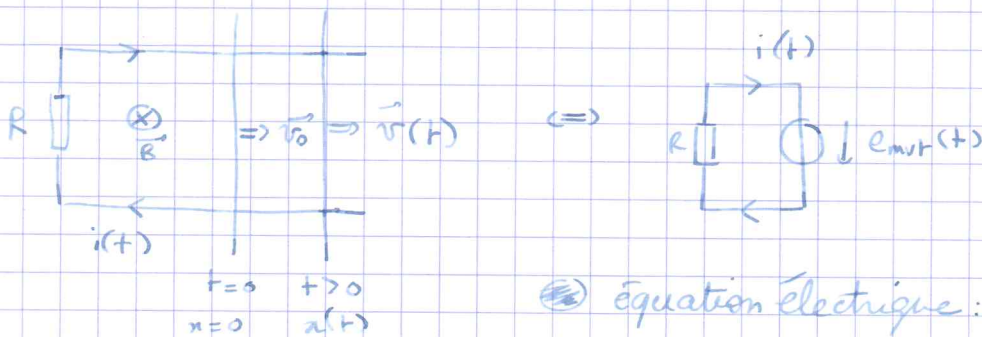
$$\Rightarrow \boxed{v(t) = v_{\infty} (1 - e^{-t/\tau})}$$

$$\text{et } \boxed{i(t) = \frac{m}{Bl} \frac{dv}{dt} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}}$$



→ ppe du moteur à courant continu

(b) Générateur (freinage)



⊗ équation électrique:

$$e_{mv}(t) = Ri(t)$$

$$\text{où } e_{mv}(t) = - \left( \frac{d\Phi}{dt} \right)_{mv} = -Blv(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{Ri(t) = -Blv(t)}$$

⊗ équation mécanique:  $m \frac{dv}{dt} = Bl i(t)$

⊗ Résolution:  $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v(t) = 0 \Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 \exp(-t/\tau)}$

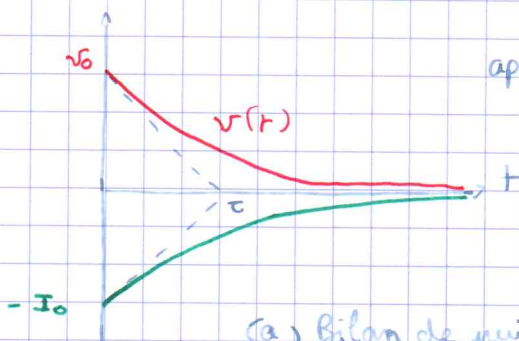
CI:  $v_0 = v(0)$

$$\text{et } \boxed{i(t) = - \frac{Blv_0}{R} \exp(-t/\tau)} < 0$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{lap}} = \frac{Bl i(t) \vec{u}_x}{< 0} \text{ selon } (-\vec{u}_x)$$

↓  
freinage

applis: freinage électromagnétique.  
générateur si le mouvement du conducteur est entretenu.



2 - Bilan de puissance: conversion électromécanique de puissance

(a) Bilan de puissance (p.ex. fonctionnement moteur)

$$E = Ri(t) - e_{mv}(t) \quad m \frac{dv}{dt} = F_{\text{lap}}(t)$$

$$\begin{cases} e_{mv} = -Blv(t) \\ F_{\text{lap}} = +Bl i(t) \end{cases}$$

⊗ Transducteur électromécanique.  
convertisseur

$$P(e_{mv}) \hat{=} e_{mv}(t) \times i(t) = -Bl i(t) v(t)$$

$$P_{Lap} = \mathcal{P}(\vec{F}_{Lap}) \hat{=} \vec{F}_{Lap} \cdot \vec{v} = +Bl i(t) v(t)$$

donc  $\boxed{P_{Lap} + P_{emv} = 0}$  fjr vrai

convertisseur de puissance électroméca .

⊙ Bilan de puissance :

$$\rightarrow (E) \times idt : \quad E idt = Ri^2 dt + Blvi$$

$$\rightarrow (M) \times v dt = m v \frac{dv}{dt} = Blvi$$

$$\Rightarrow \underbrace{E idt}_{SW_{\text{géné}}} = \underbrace{Ri^2 dt}_{SW_{\text{joule}}} + \underbrace{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}_{dE_c}$$

(b) Interprétation  $\mathcal{P}$  de  $P_{Lap} + P_{emv} = 0$

⊙ échelle micro: soit 1 porteur de charge ( $e^-$  ou cation du réseau cristallin) de vitesse  $\vec{v}$  /  $R_{\text{Lap}}$

$$\vec{F}_{Lor} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{de puissance} \quad P_{Lor} = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{\text{tot}}(\vec{B}) = 0 = \underbrace{\mathcal{P}_{\text{méca}}(\vec{B})}_{P_{Lap}} + \underbrace{\mathcal{P}_{\text{élec}}(\vec{B})}_{e_{mv} \times i}$$

$$\rightarrow \text{Appli: si on connaît } e_{mv} = -\frac{d\mathcal{P}}{dt}, \quad \Gamma = -\frac{e_{mv} i}{\omega}$$