EM6 : ENERGIE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

I – Equation locale de Poynting : conservation de l'énergie électromagnétique

1 – Démonstration

- Vu $p_{vol} = \vec{j}.\vec{E}$ fournie par $(\vec{E},\vec{B})$ à l milieu cond

- Vu aussi électstat : $u_{es} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ magnstat : $u_{mag} = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$

Q : Comment généraliser ?

- $$\vec{j}.\vec{E} = \left(\vec{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right).\vec{E}$$
$$= \vec{E}.\vec{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\right)$$

- Formule d'analyse vectorielle (donnée) : $div(\vec{C}\wedge\vec{D}) = \vec{D}.\vec{rot}\,\vec{C} - \vec{C}.\vec{rot}\,\vec{D}$

$$\vec{E}.\left(\vec{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right)\right) = div\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\wedge\vec{E}\right) + \frac{\vec{B}}{\mu_0}.\vec{rot}\,\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{j}.\vec{E} = div\left(\frac{\vec{B}\wedge\vec{E}}{\mu_0}\right) + \frac{\vec{B}}{\mu_0}.\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{-\vec{j}.\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + div\left(\vec{E}\wedge\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right)}$$ équation locale de Poynting

2 – Densité d'énergie ém et vecteur de Pointing.

- éq. très voisine de $\dfrac{\partial}{\partial t}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\mu_0 v_1^2 + \tfrac{1}{2}\chi_s p_1^2}_{u_{son}}\Big) + div(\underbrace{p_1\vec{v_1}}_{\vec{\Pi}_{son}}) = 0$

- Postulat : l'énergie ém. est localisé non dans les charges et les courants qui créent $(\vec{E},\vec{B})$ mais dans le champ $[\vec{E},\vec{B}]$ lui-même.

Déf : $$\boxed{u_{em}(\vec{r},t) \triangleq \frac{\varepsilon_0 E^2(\vec{r},t)}{2} + \frac{B^2(\vec{r},t)}{2\mu_0}}$$ $(J.m^{-3})$

Déf : vecteur densité de courant d'énergie ém :

$$\boxed{\vec{\Pi}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t)\wedge\frac{\vec{B}(\vec{r},t)}{\mu_0}}$$ $(W.m^{-2})$

- équation locale de conservation de l'énergie ém :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + div(\vec{\Pi}) = -\vec{j}.\vec{E}$$

3- Cas de l'électrostatique

$\vec{j} = \vec{0}$
$\vec{B} = \vec{0}$

$u_{em} = u_{es}(\vec{r}) = \dfrac{\varepsilon_0 E^2(\vec{r})}{2}$ = cste par rapport à t

$\vec{\Pi} = \vec{0}$ $\quad \vec{j}\cdot\vec{E} = 0$ $\quad$ cohérent

4- Cas de la magnétostatique et de l'ARQS magnétique

(a) Magnétostatique : $\vec{E} = \vec{0}$ $\quad \dfrac{\partial}{\partial t} = 0$

$u_{em} = u_{mag}(\vec{r}) = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$ cst par rapport à t

$\vec{\Pi} = \vec{0}$

$\vec{j}\cdot\vec{E} = \vec{0}$ $\quad\rightarrow$ cohérent

(b) ARQS magnétique $\quad \vec{E} \neq \vec{0}$ $\quad \vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

mais $\dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} \ll \dfrac{B^2}{2\mu_0}$ (ARQS) $\rightarrow u_{em} \sim u_{mag}(\vec{r},t) = \dfrac{B^2(\vec{r},t)}{2\mu_0}$

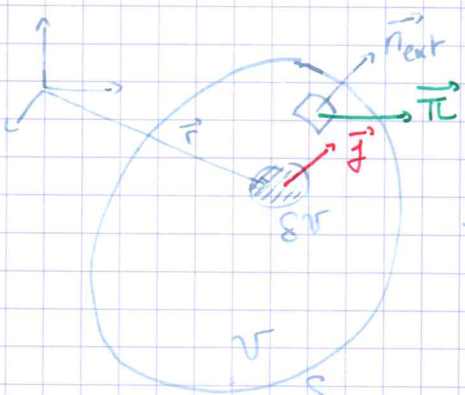
$\vec{\Pi}(\vec{r},t) = \vec{E} \wedge \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} \neq \vec{0}$

$\vec{j}\cdot\vec{E} = \sigma E^2 \neq 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \operatorname{div}\left(\vec{E}\wedge\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = -\sigma E^2$$

II- Bilan intégral d'énergie ém

1- Bilan sur un volume de contrôle



① éq. locale de Poynting :

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial u_{em}}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\Pi} = -\vec{j}\cdot\vec{E}$

$$\rightarrow \iiint_V \frac{\partial u_{em}}{\partial t}(\vec{r},t)\,\delta V = \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\iiint_V u_{em}(\vec{r},t)\,\delta V}\Big] = \frac{dU_{em}}{dt}$$

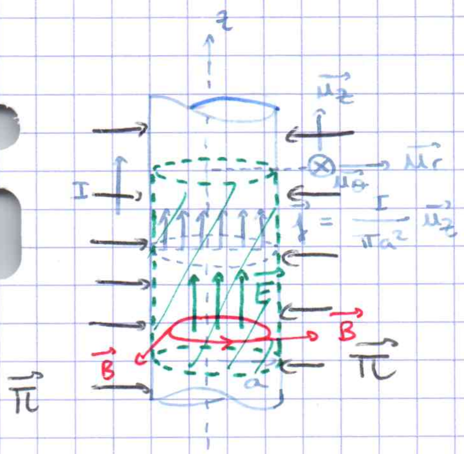
U_{em} : énergie du champ $[\vec{E},\vec{B}]$ contenue ds V

$$\rightarrow \iiint_V \operatorname{div}\vec{\Pi}\,.\,\delta V = \oiint_S \vec{\Pi}\cdot\vec{n}^{ext}\,dS = P_{ray}$$ $\rightarrow$ puissance rayonnée à travers S

$$\rightarrow \iiint_V \underbrace{\vec{j}\cdot\vec{E}}_{P_{vol}}\,\delta V = P_{champ\rightarrow mat}$$

Bilan : $\dfrac{dU_{em}}{dt} = -P_{ray} - P_{chp\rightarrow mat}$ $\Leftrightarrow$ éq. locale de Poynting

2_ Exemple 1 : conducteur ohmique cylindrique en régime stationnaire



$$\vec{B}(r \leq a) = \mu_0 \frac{Ir}{2\pi a^2}\vec{u_\theta}$$

$$\vec{E}(r \leq a) = \frac{\vec{j}}{\sigma} = \frac{I}{\sigma \pi a^2}\vec{u_z}$$

- $u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ indép de t

- $\vec{\pi}(r \leq a) = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = -\frac{I^2 r}{2\sigma(\pi a^2)^2}\vec{u_r}$

- Bilan énergétique sur cylindre de hauteur h, rayon a^-

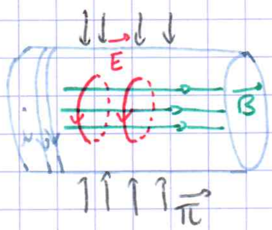
$\frac{\partial U_{em}}{\partial t} = 0$ (rég. stat)

$$P_{ray} = \oint_S \vec{\pi} \cdot \vec{n}^{ext} dS = 0 + 0 + \iint_{S_{lat}} \vec{\pi}(a^-) \cdot \vec{u_r}\, dS$$

$$= -\frac{I^2 a}{2\sigma(\pi a^2)^2} 2\pi a h$$

$$P_{ray} = -\underbrace{\left(\frac{h}{\sigma \pi a^2}\right)}_{R} I^2 = -P_{Joule} \qquad P_{ray} + P_{Joule} = 0$$

3_ Exemple 2 : Etablissement (lent) du courant dans un solénoïde



$$\begin{cases} \vec{B}_{int} = \mu_0 n i(t) \vec{u_z} & \text{dép}^t \text{ de } t \\ \vec{E}_{int} = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\vec{u_\theta} \end{cases}$$

- $u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$

$$\frac{\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}}{\frac{B^2}{2\mu_0}} = \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{E}{B}\right)^2 \# \frac{1}{c^2}\left(\frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{B_{max}}{\tau}}{B_{max}}\right)^2 = \frac{a^2}{4c^2\tau^2} \# \left(\frac{\Delta t_{prop}}{\tau}\right)^2 \ll 1 \quad (ARQS)$$

ARQS mag : $u_{em}(\vec{r}, t) \simeq u_{mag}(\vec{r}, t) = \frac{B^2}{2\mu_0}$

$$\rightarrow U_{em}(t) = \iiint_{\substack{vol \\ h \times \pi a^2}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau \Rightarrow U_{em}(t) = \frac{B^2(t)}{2\mu_0} \times h \pi a^2$$

- $\vec{\pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = -\frac{r}{2\mu_0}\frac{dB}{dt} \cdot B(t)\vec{u_r}$

$$P_{ray} = \oint_{cyl} \vec{\pi} \cdot \vec{n}^{ext} dS = -\frac{a}{2\mu_0} B \frac{dB}{dt} \times 2\pi a h = -\frac{d}{dt}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) \times \underbrace{(\pi a^2 h)}_{\tau}$$

$$= -\frac{dU_{em}}{dt}$$