

1. Electrostatique

Exercice 1 : Modèle classique de Thomson de l'atome d'hydrogène

On modélise le mouvement de l'électron (masse m , charge $-e$) d'un atome d'hydrogène par celui d'un oscillateur harmonique effectuant de petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable. Le centre du noyau étant fixe en O , l'électron oscille selon un axe (O, \vec{e}_r) , il est repéré par le vecteur $\vec{r} = r\vec{e}_r$ ou r désigne sa distance à l'origine O . Il subit une force de rappel de la part du noyau : $\vec{F}_n = -m\omega_0^2 r\vec{e}_r$ avec $\omega_0 = 3,9 \cdot 10^{15} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

On admet que toute charge accélérée rayonne un champ électromagnétique. L'électron oscillant, il émet donc un rayonnement dont la puissance moyenne (sur une période d'oscillation de l'électron) est donnée par la formule de Larmor : $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \langle \ddot{r}^2 \rangle$.

Afin de justifier le caractère harmonique de la force de rappel subie par l'électron de la part du noyau, on adopte le modèle de Thomson. On modélise le noyau d'un atome d'hydrogène par une boule de centre O et de rayon a au sein de laquelle évolue l'électron supposé ponctuel, ce dernier restant à l'intérieur du noyau. La charge totale du noyau est uniformément répartie dans son volume.

1. Déterminer le champ électrique \vec{E}_n dû au noyau en son sein (i.e. pour $r < a$). En déduire la force \vec{F}_n qu'exerce le noyau sur l'électron. Faire le lien avec la force de rappel donnée précédemment en identifiant ω_0 .
2. Déterminer, dans le cas d'oscillations libres, $r(t)$ en fonction des caractéristiques du système (on choisira comme conditions initiales $r(0) = r_0$ et $\dot{r}(0) = 0$) et en déduire l'expression de l'énergie mécanique \mathcal{E} de l'électron en fonction de m , ω_0 et r_0 .
3. On considère dans la suite que cette énergie mécanique, malgré sa diminution due au rayonnement, diffère peu sur une période de celle que l'on vient d'établir en négligeant les pertes d'énergie.

En tenant compte de la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ perdue par rayonnement, donner l'équation différentielle vérifiée par \mathcal{E} et montrer que \mathcal{E} dépend en fait du temps et se met sous la forme $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \exp(-\Gamma t)$. Calculer la valeur de $1/\Gamma$ dans le cas de la raie bleue du spectre de l'atome d'hydrogène pour laquelle $\lambda = 486,1 \text{ nm}$. Justifier a posteriori le calcul effectué.

Exercice 2 : Orbitale 1s de l'atome d'hydrogène

L'atome d'hydrogène est constitué d'un proton de charge $+e$ et d'un électron de charge $-e$. Nous nous proposons de modéliser l'atome en supposant que l'électron occupe l'orbitale $1s^1$ qui est à symétrie sphérique.

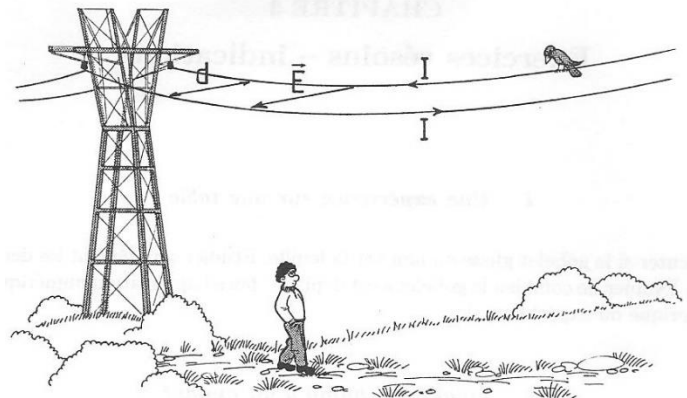
Dans ce modèle, le proton est assimilé à une charge ponctuelle située à l'origine O de l'espace, et l'électron est délocalisé au sein d'un nuage électronique. Cette distribution de charges crée alors le potentiel suivant, exprimé en coordonnées sphériques : $V(r) = K \frac{\exp(-2\frac{r}{a})}{r} (1 + \frac{r}{a})$ où $a = 53,0$ pm est le « rayon de Bohr ».

1. Que vaut K ?
2. Déterminer le champ électrique en tout point de l'espace. Commenter.
3. Calculer la charge $Q(r)$ contenue dans une sphère de rayon r . Examiner les limites et commenter.
4. Calculer la densité volumique de charge $\rho(r)$. Commenter.
5. Calculer l'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène (réponse : $U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$). Effectuer l'application numérique dans une unité adaptée. Commenter.

Exercice 3 : Ligne à haute tension « électrique »

Des polémiques resurgissent régulièrement autour de l'influence supposée néfaste des lignes à haute tension sur la santé des personnes qui vivent dans leur voisinage. L'objet de cet exercice est d'évaluer le champ électromagnétique créé par une telle ligne à haute tension pour accréditer l'accusation ou au contraire l'infirmer.

On suppose que la ligne est constituée d'une paire de fils distants de $d \approx 4$ m, situés à une hauteur $h \approx 40$ m du sol. Entre deux fils d'une même paire, règne une différence de potentiel $U \approx 500$ kV, et chaque fil est parcouru par un courant $I \approx 1$ kA.



La fréquence de la tension et du courant est $f = 50$ Hz. On admet que ce problème est malgré tout un problème de champs statiques. On n'envisage ici que l'aspect électrique du problème (et donc, pas son aspect magnétique).

1. Calculer l'ordre de grandeur du champ électrique régnant en un point situé à égale distance des deux fils, dans leur plan.
2. Calculer l'ordre de grandeur du champ électrique ressenti par une personne située au sol, à égale distance des deux fils (on pourra introduire momentanément une densité linéique de charge $\pm\lambda$ portée par chaque fil). Comment varie le champ avec le rapport $\frac{d}{h}$? Commenter.

Exercice 4 : Effet d'écran dans un plasma

Les plasmas sont des milieux globalement neutres, partiellement ou totalement ionisés. On s'intéresse à un plasma d'Argon contenant, *en moyenne* et par unité de volume n_e électrons libres de masse m_e et de charge $-e$ et $n_i = n_e$ ions Ar^+ de masse m_i et de charge $+e$. On suppose que le plasma est à l'équilibre thermodynamique local, ce qui permet de définir sa température T .

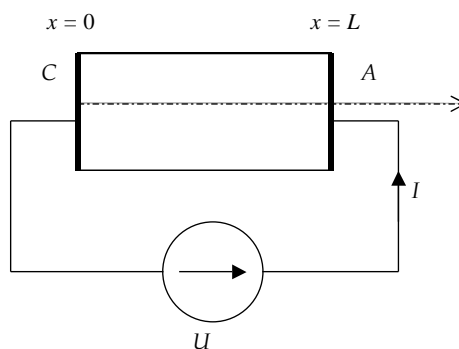
Considérons un ion Ar^+ particulier, situé par commodité à l'origine des coordonnées. Du fait de l'attraction coulombienne, on observe un surplus de charge négative entourant cet ion, responsable d'un écart *local* à la neutralité. On s'intéresse à la répartition du potentiel et des charges autour de cet ion.

On donne, pour une fonction $f(r)$ à symétrie sphérique : $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rf(r))$.

1. Soit $V(r)$, le potentiel en un point M , situé à une distance r de l'ion Ar^+ . On suppose le potentiel nul à l'infini. Les densités volumiques d'ions et d'électrons sont modifiées par rapport à la situation uniforme : $n^+ = n_i \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_B T}\right)$ et $n^- = n_e \exp\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right)$, où $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann. Commenter ces expressions.
Donner l'expression de la densité volumique de charge $\rho(r)$. En déduire l'équation locale vérifiée par le potentiel $V(r)$.
2. On se place à haute température : $eV(r) \ll k_B T$. Donner la forme approchée du potentiel $V(r)$. On introduira la grandeur $\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2n_e e^2}}$ et on l'interprétera.
Commenter le résultat obtenu.
3. En déduire la densité volumique de charge $\rho(r)$, puis la charge $Q(r)$ contenue dans une sphère de centre O et de rayon r . Examiner les cas limites $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$. Commenter.
4. On donne pour ce plasma $n_i = 3 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$. Calculer numériquement λ_D pour $T = 1000 \text{ K}$ et $T = 10000 \text{ K}$, et la distance moyenne entre deux ions. Commenter la validité du modèle adopté ici.

Exercice 5 : Diode à vide

Une cathode (C), constituée d'une plaque métallique plane de surface S , est chauffée et émet des électrons (sans vitesse initiale) dans une enceinte où règne un vide poussé. Ces électrons sont récupérés par une anode (A) identique à (C) et portée à un potentiel U positif par rapport à la cathode, par un générateur de tension de fém U . On étudie un régime stationnaire pour lequel on définit dans l'espace inter-électrodes $0 \leq x \leq L$, la vitesse $v(x)$ d'un électron à l'abscisse x , le nombre volumique d'électrons $n(x)$ et le potentiel électrostatique $V(x)$, avec $V(x=0) = 0$. On note I l'intensité du courant dans le circuit.

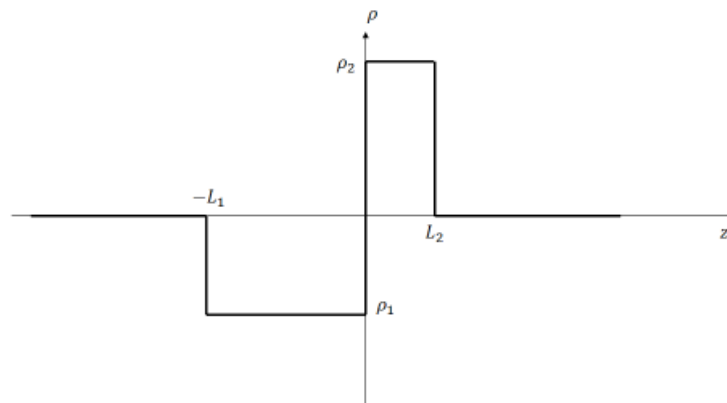


1. Donner la relation liant la vitesse $v(x)$ d'un électron au potentiel $V(x)$.
2. Etablir l'expression de l'intensité $I(x)$ à travers une section S d'abscisse x en fonction notamment de $n(x)$ et $V(x)$. Justifier que $I(x)$ est en fait indépendant de x .
3. En déduire l'équation différentielle régissant le potentiel $V(x)$ et la résoudre par une méthode de votre choix.
4. Déterminer la loi $I(U)$ pour $U > 0$. Que peut-on dire du courant si $U < 0$? Proposer une application pratique de ce composant.

Exercice 6 : Jonction PN

Lorsqu'un semi-conducteur présente, dans une région très localisée de l'espace, une variation très brutale de la concentration en dopant, voire un changement de la nature du dopant, on dit qu'on a une jonction. Au voisinage de la jonction, dans une région dite « zone de charge d'espace », le cristal acquiert une distribution de charge électrique non nulle que l'on se propose d'étudier. Les propriétés qui en résultent sont à la base de la caractéristique de diodes, des transistors et de tous les circuits intégrés.

On considère un échantillon de germanium très allongé selon les directions Ox et Oy , présentant une densité volumique de charge $\rho(z)$ invariante par translation selon ces axes Ox et Oy , autour d'une jonction située dans le plan $z = 0$, dont le profil est le suivant :



1. Sachant que la distribution de charge est globalement neutre, exprimer ρ_1 en fonction de ρ_2 , L_1 et L_2 .
2. Déterminer le champ électrique en tout point M de l'espace en fonction de ρ_2 , L_1 et L_2 , ϵ_0 et z . On supposera que le champ électrique est nul pour un point M situé à l'infini.
3. En déduire que le potentiel électrostatique dans la zone de charge d'espace (en supposant

$$V(0) = 0) \text{ s'écrit : } \begin{cases} V(0 \leq z \leq L_2) = -\frac{\rho_2}{\epsilon_0} \left(\frac{z^2}{2} - L_2 z \right) \\ V(-L_1 \leq z \leq 0) = \frac{\rho_2 L_2}{\epsilon_0 L_1} \left(\frac{z^2}{2} + L_1 z \right) \end{cases}$$

4. Représenter $V(z)$. Donner l'expression de la différence de potentiel U_0 entre deux points situés de part et d'autre de la zone de charge d'espace.
5. La région $(0 \leq z \leq L_2)$ a été dopée avec de l'antimoine Sb à raison de $N_2 = 1,6 \cdot 10^{21}$ atomes Sb par m^3 tandis que la région $(-L_1 \leq z \leq 0)$ a été dopée avec du bore B, avec un nombre

volumique N_1 d'atomes B tel que $N_1 \gg N_2$. On admet que dans la zone de charge d'espace, chaque atome Sb est ionisé en Sb^+ . Les électrons ainsi libérés traversent spontanément le plan $z = 0$ et chaque atome de bore situé dans la zone de charge d'espace s'ionise en un anion B^- .

En déduire ρ_1 et ρ_2 en fonction de N_2 .

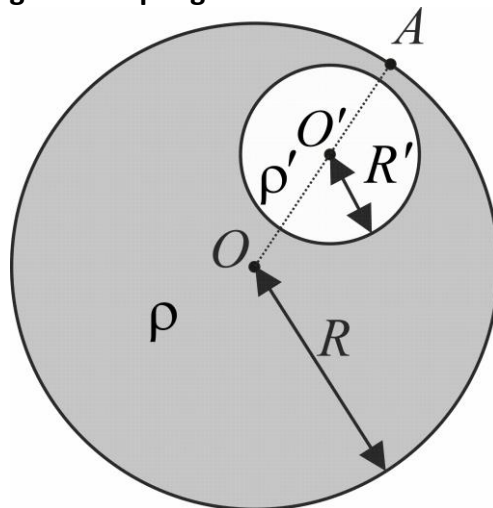
- Le système ainsi constitué est une diode à jonction dont la tension de seuil est voisine de U_0 . En déduire une expression approchée de la largeur δ de la zone de charge d'espace.
- Application numérique : calculer δ . On donne : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$; $U_0 = 0,3 \text{V}$ et $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$.

Exercice 7 : Rayon classique de l'électron

Un électron (charge $-e$, masse m , rayon R) est au repos. On prend le centre O de l'électron comme origine des coordonnées.

- Calculer le champ électrostatique créé par l'électron dans tout l'espace en assimilant celui-ci à une sphère uniformément chargée en surface.
- Calculer l'énergie électrostatique U_{ES} stockée dans le champ de l'électron.
- On rappelle que l'énergie d'une particule de masse m au repos est donnée par la relation d'Einstein : $E = mc^2$, où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide. Pouvez-vous en déduire une estimation du rayon R de l'électron ? Qu'en dites-vous ?

Exercice 8 : Détection d'un gisement par gravimétrie



- On modélise la Terre comme une sphère homogène de rayon R et de masse volumique ρ . Calculer le champ de gravitation \vec{G}_0 à la surface de la Terre.

A la verticale du point A se trouve un gisement sphérique enfoui sous la surface terrestre : ce gisement correspond à un défaut d'homogénéité de la Terre. Dans la sphère de centre O' et de rayon R' , entièrement enfouie dans la Terre à une profondeur $h > R'$, la masse volumique vaut $\rho' < \rho$.

- Quelle est alors la variation relative $\frac{\delta G}{G_0}$ de la norme du champ de gravitation terrestre au point A ? Commenter l'influence de R' et de h .

Exercice 9 : Anomalie gravitationnelle de Bouguer

Le champ gravitationnel pour un point M situé à une altitude h (hauteur par rapport au niveau des océans) est approximé par les géologues sous la forme :

$$g_B(h) = g_0 - 0,386h + 0,0419\mu h$$

où μ est la masse volumique locale en $\text{kg} \cdot \text{dm}^{-3}$, h s'exprime en mètres et g en mgal ($1 \text{ gal} = 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

1. Que représente g_0 ?

1. En assimilant la Terre à une sphère parfaite de rayon R_T et de masse M_T , déterminer l'expression du champ de gravitation $g(h)$ ainsi que son expression approchée pour $h \ll R_T$.

2. Pour tenir compte du relief, on modélise l'épaisseur de croûte terrestre située sous le point considéré par une table horizontale plane d'épaisseur h , et de masse volumique μ dont on calcule le champ gravitationnel en négligeant tout effet de bord. Déterminer le champ créé par cette table en tout point de l'espace.

3. On donne $M_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6,38 \times 10^3 \text{ km}$, $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{ kg}^{-2}$. Vérifier l'adéquation numérique aux questions précédentes.

Exercice 10 : Effondrement gravitationnel (Oral X – ENS PSI 2017)

L'effondrement gravitationnel de matière stellaire survient lorsque la masse volumique devient trop importante et que la pression n'arrive plus à compenser l'attraction gravitationnelle. On s'intéresse à un nuage de matière stellaire à symétrie sphérique d'atomes d'hydrogène ionisés (donc de protons), de rayon R , de température T et de masse volumique ρ . On supposera ρ et T uniformes.

Analyse qualitative 1

1. Calculer l'énergie potentielle gravitationnelle du nuage en fonction notamment de ρ et R . On proposera deux méthodes différentes et on mettra en œuvre l'une d'entre elles.
2. Calculer son énergie cinétique d'agitation thermique en fonction notamment de T , ρ et R .
3. Il y a effondrement gravitationnel lorsque $2E_c + E_p < 0$ (c'est le critère de Jeans). Exprimer le rayon critique R_J et la masse critique M_J en fonction notamment de T et ρ . Commenter.

Analyse qualitative 2

1. Exprimer τ_g , durée de compression gravitationnelle (i.e. durée de chute libre d'un corps entre la surface du nuage et son centre) en fonction notamment de ρ . Commenter.
2. Exprimer τ_p , durée nécessaire pour qu'il y ait à nouveau équilibre de pression, qui correspond à la durée de propagation d'une onde acoustique de célérité c_s de la surface vers le centre du nuage. Commenter.

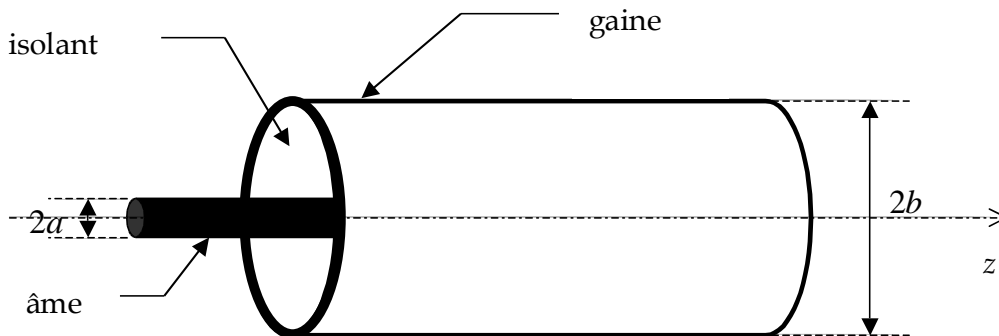
$$\text{Donnée : } c_s = \sqrt{\frac{5k_B T}{3m_p}}$$

3. Montrer qu'on retrouve le fait qu'il peut y avoir effondrement gravitationnel.

2. Condensateurs

Exercice 11 : Capacité linéique d'un câble coaxial

On cherche ici à caractériser le comportement d'un câble coaxial dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires, d'un point de vue électrique : on supposera donc que l'on peut appliquer les lois de l'électrostatique à tous instant. Celui-ci est constitué de deux cylindres conducteurs coaxiaux de section circulaire, de rayons respectifs a et b ($a < b$) **de très grande longueur**, séparés par un isolant. Le cylindre central (« l'âme ») est plein tandis que le cylindre extérieur (« la gaine ») est creux :



L'isolant est de l'air assimilé à du vide. On suppose que l'âme est portée au potentiel $V(t)$. La gaine est, quant à elle, reliée à la masse : son potentiel est donc nul.

1. Soit $\lambda(t)$, la charge portée par l'âme, par unité de longueur. Que vaut la charge portée par la gaine, par unité de longueur ?
2. Déterminer le champ électrique en tout point de l'espace, en fonction de $\lambda(t)$.
3. Proposer et mettre en œuvre deux méthodes différentes pour calculer la capacité linéique C du câble. Donner sa valeur numérique.

Données : $a = 0,43 \text{ mm}$; $b = 1,47 \text{ mm}$; $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

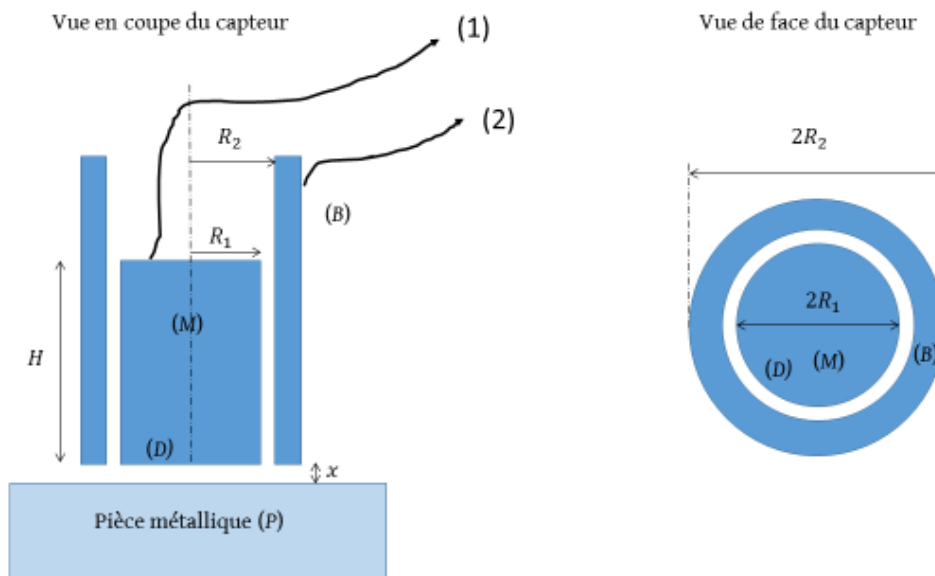
Exercice 12 : Capteur capacitif de proximité

Pour asservir avec précision la position d'une pièce métallique mobile par rapport à un outil fixe, on peut utiliser un capteur capacitif de proximité.

La tête de mesure de ce capteur comporte une électrode de mesure, notée (M) : il s'agit d'un cylindre métallique de longueur H , de base circulaire (D), de rayon R_1 .

Cette électrode (M) est entourée d'un cylindre coaxial creux de longueur supérieure à H , de rayon intérieur R_2 , dont une extrémité est exactement dans le plan du disque (D) : ce cylindre creux est l'électrode blindage, notée (B).

La pièce métallique mobile, notée (P) est parallèle au disque (D), à une distance x de celui-ci.



L'ensemble $\{(M), (B), (P)\}$ forme une association de trois condensateurs :

- Le condensateur $\{(M), (B)\}$ de capacité $C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 H}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$,
- Le condensateur $\{(M), (P)\}$ de capacité $C_1(x)$,
- Le condensateur $\{(B), (P)\}$ de capacité $C_2(x)$.

- 1) a) Dessiner le schéma électrique équivalent au dipôle vu des deux fils de connexion (1) et (2) (cf. schéma).
b) Exprimer la capacité équivalente C_m du capteur en fonction de C_0 , C_1 et C_2 .
- 2) On suppose le champ électrique normal en tout point aux parois conductrices et on néglige tout effet de bord.
 - a) Quelle condition forte doivent vérifier R_1 et x ?
 - b) Calculer la capacité $C_1(x)$ en fonction de ϵ_0 , R_1 et x .
- 3) Pour mesurer x , on relie la pièce métallique (P) et l'électrode de blindage (B) à la masse. Que vaut alors la capacité C_m du capteur en fonction de x ?
- 4) Faire l'application numérique. Commenter.
Données : $R_1 = 5 \text{ mm}$; $R_2 = 6 \text{ mm}$; $H = 5 \text{ mm}$; $x = 0,1 \text{ mm}$; $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.
- 5) Proposer un protocole permettant de mesurer cette capacité.

Exercice 13 : Influence de la présence d'un électrolyte sur la capacité d'un condensateur

On place un électrolyte entre les deux armatures d'équations $z = -a$ et $z = +a$ d'un condensateur plan portées respectivement aux potentiels $-\frac{V_0}{2}$ et $+\frac{V_0}{2}$. L'ensemble est thermostaté à la température T . Lorsqu'il n'y a pas de différence de potentiel entre les deux armatures ($V_0 = 0$), l'électrolyte est globalement neutre : il contient n_0 cations de charge $+q$ et n_0 anions de charge $-q$ par unité de volume. Lorsqu'on applique la différence de potentiel $V_0 > 0$, le potentiel en un point d'abscisse z entre les armatures devient $V(z)$, et le nombre volumique de cations situés en z s'écrit, à l'équilibre thermodynamique : $n^+(z) = n_0 \exp\left(-\frac{qV(z)}{k_B T}\right)$.

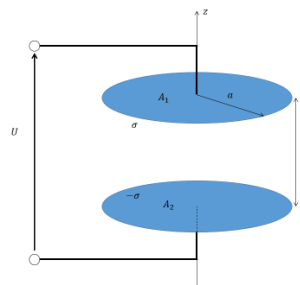
1. Interpréter l'expression fournie pour $n^+(z)$ et donner l'expression du nombre volumique d'anions $n^-(z)$ à l'abscisse z . Calculer la densité volumique de charge $\rho(z)$.
2. L'électrolyte a pour permittivité diélectrique relative $\epsilon_r \approx 80$. Déterminer l'équation différentielle qui régit le potentiel $V(z)$. La résoudre dans le cas $k_B T \gg qV_0$. On introduira la grandeur $\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r k_B T}{2n_0 q^2}}$ que l'on interprétera. En déduire le champ électrostatique \vec{E} entre les armatures. Tracer $V(z)$ et $E(z)$.
3. On note S la surface des armatures. Calculer la capacité C du condensateur et la comparer à sa valeur C_0 en l'absence de tension appliquée. Comment peut-on qualifier le fonctionnement du système ? Quelle en est la cause ?

Exercice 14: Capteur de niveau de pétrole dans un réservoir

On considère un réservoir cylindrique de hauteur H , de rayon $R_1 = 5$ m, rempli de pétrole sur une hauteur h . On plonge à l'intérieur une sonde métallique cylindrique de rayon $R_2 = 3$ m. On cherche à déterminer par une mesure de capacité le niveau h de pétrole restant dans le réservoir. Comment faire ? On note $\epsilon_r \approx 5$ la permittivité diélectrique relative du pétrole.

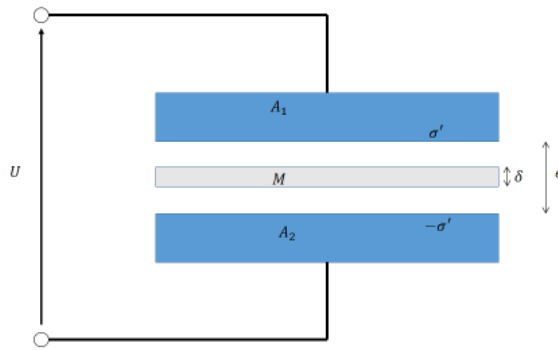
Exercice 15 : Capteur de pression différentielle

On considère un condensateur plan constitué de deux armatures (A_1) et (A_2) circulaires coaxiales, de rayon a , distantes de e , avec $e \ll a$, séparées par du vide. On néglige tout effet de bord. Le condensateur est soumis à la tension U constante.

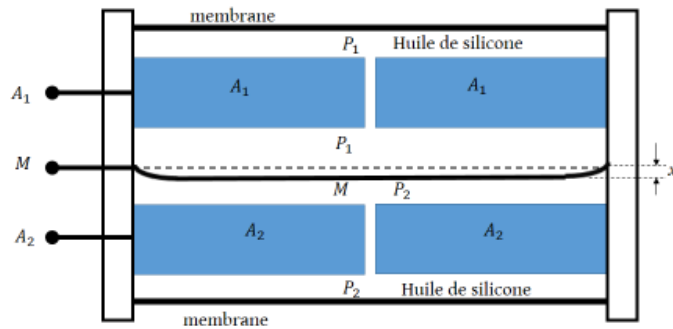


Une pellicule métallique (M) circulaire, de même rayon a et d'épaisseur δ , isolée et initialement neutre, est introduite parallèlement aux armatures dans le condensateur précédent, et placée à égale distance des deux armatures.

1. Que vaut le potentiel adopté par la pellicule (M) ?
2. En déduire le champ électrique \vec{E} régnant entre (A_1) et (M), et entre (M) et (A_2), ainsi que les densités surfaciques de charge σ' et $-\sigma'$ portées par les différentes surfaces métalliques.
3. En déduire que la nouvelle capacité C' du condensateur équivalent vu par le générateur s'écrit : $C' = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{e - \delta}$.

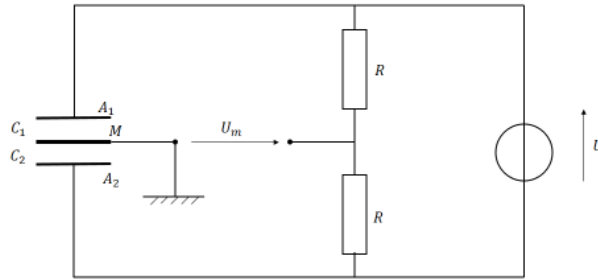


4. Le condensateur est maintenant rempli d'huile de silicone (que l'on assimilera à du vide d'un point de vue électrostatique) et entièrement scellé sur toute sa circonférence, la pellicule (P) étant maintenue isolée des deux armatures. Deux canaux de communication capillaires très fins sont pratiqués dans les deux armatures pour permettre aux deux compartiments situés entre (A_1) et (M), et entre (M) et (A_2) d'être soumis à des pressions différentes respectives P_1 et P_2 , grâce à deux membranes rigides faisant office de pistons. Sous l'effet de la différence de pression positive $\Delta P = P_1 - P_2$, la pellicule (M) se déplace d'une très faible distance x vers l'armature (A_2), et subit une force de rappel élastique $-kx$ appliquée par les joints de maintien sur toute sa circonférence (k étant une constante positive).



Calculer les capacités C_1 et C_2 des deux condensateurs formés par $\{(A_1), (M)\}$ et $\{(M), (A_2)\}$ en fonction de ϵ_0 , a , e , δ et x .

5. Pour obtenir un signal électrique lié à la pression différentielle $\Delta P = P_1 - P_2$, on réalise le montage ci-dessous en mettant la pellicule (M) à la masse, et en mesurant la tension U_m entre le point milieu d'un pont diviseur de tension constitué de deux résistances identiques et la masse. Le capteur est soumis à une tension d'alimentation constante U .



Montrer que la tension de mesure U_m est liée aux capacités C_1 et C_2 par la relation : $U_m = \frac{U}{2} \frac{C_2 - C_1}{C_2 + C_1}$.

6. a) Traduire l'équilibre mécanique de la pellicule (M), et en déduire la relation liant le déplacement x et la pression différentielle $\Delta P = P_1 - P_2$.
- b) Calculer le signal mesuré U_m en fonction notamment de pression différentielle $\Delta P = P_1 - P_2$. Commenter le résultat obtenu.
- c) En déduire la sensibilité \mathcal{S} du capteur définie par $\mathcal{S} = \frac{U_m}{\Delta P}$. Calculer numériquement \mathcal{S} sachant que : $k = 2 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$; $e = 2 \text{ mm}$; $a = 5 \text{ mm}$; $\delta = 50 \mu\text{m}$; $U = 15 \text{ V}$. Commenter.

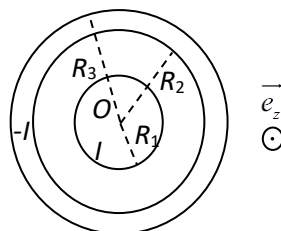
3. Magnétostatique

Exercice 16 : Ruban de courant

On considère, en coordonnées cartésiennes, une répartition de courants volumiques de densité volumique de courant $\vec{j} = j_0 \vec{e}_y$ uniforme entre les plans $z = a/2$ et $z = -a/2$. Il n'y a aucun courant pour $|z| > a$.

1. En utilisant les symétries et invariances, préciser au maximum l'expression du champ magnétique créé par cette distribution. Préciser en particulier la parité de la fonction B .
2. En utilisant le théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétique en tout point M de l'espace.
3. En utilisant les équations locales de la magnétostatique, déterminer le champ magnétique dans tout l'espace.

Exercice 17 : Câble coaxial



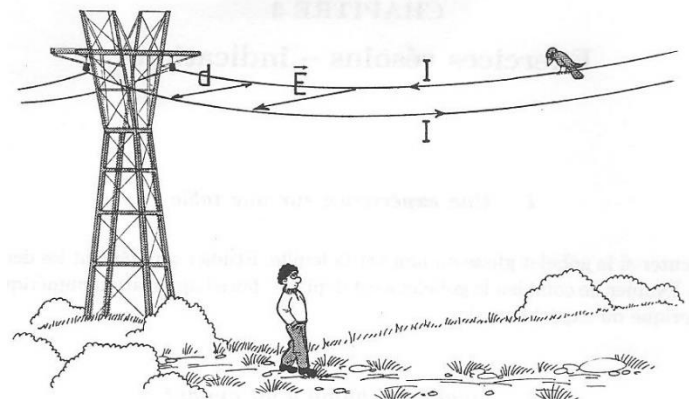
On considère un câble coaxial cylindrique de longueur supposée infinie, constituée d'un conducteur central plein de rayon R_1 parcouru par un courant uniforme d'intensité I et d'un conducteur périphérique évidé, de rayon intérieur R_2 , de rayon extérieur R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$) et parcouru par un courant uniforme de même intensité I mais dans le sens inverse par rapport au conducteur central. On note \vec{e}_z le vecteur directeur unitaire de l'axe commun des deux conducteurs. On désire connaître le champ magnétique créé par cette distribution en tout point M de l'espace.

1. Par des considérations d'invariance et de symétrie, simplifier au maximum l'expression du champ. Préciser l'allure des lignes de champ.
2. Déterminer les densités volumiques de courant \vec{j} et \vec{j}' dans chacun des deux conducteurs.
3. Déterminer l'expression du champ magnétostatique pour $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, $R_2 < r < R_3$, $R_3 < r$ et tracer le graphe correspondant.
4. On considère le cas limite où $R_2 = R_3 = R$, et où le conducteur central est un cylindre creux de rayon R_1 . Tous les courants sont alors surfaciques. Déterminer l'expression du champ magnétostatique en tout point. En déduire l'énergie magnétique contenue par unité de longueur du câble. Déterminer l'inductance linéique de ce câble.
Données : $a = 0,43$ mm ; $b = 1,47$ mm.

Exercice 18 : Ligne à haute tension « magnétique »

Des polémiques resurgissent régulièrement autour de l'influence supposée néfaste des lignes à haute tension sur la santé des personnes qui vivent dans leur voisinage. L'objet de cet exercice est d'évaluer le champ électromagnétique créé par une telle ligne à haute tension pour accréditer l'accusation ou au contraire l'infirmier.

On suppose que la ligne est constituée d'une paire de fils distants de $d \approx 4$ m, situés à une hauteur $h \approx 40$ m du sol. Entre deux fils d'une même paire, règne une différence de potentiel $U \approx 500$ kV, et chaque fil est parcouru par un courant $I \approx 1$ kA (cf. schéma ci-dessous).



1. La fréquence de la tension et du courant est $f = 50$ Hz. Ce problème est-il malgré tout un problème de champs statiques ?
2. Calculer l'ordre de grandeur du champ magnétique ressenti par une personne située au sol, à égale distance des deux fils. Comment varie le champ avec le rapport $\frac{d}{h}$? Commenter.
3. Les valeurs que vous venez de calculer vous paraissent-elles dangereuses ? On argumentera évidemment de manière quantitative, et non émotive...

Exercice 19 : Faisceau de particules α

On considère un faisceau cylindrique de particules α (noyaux He^{2+}) de rayon R et d'axe (Oz) . Les particules portent une charge $q = 2e$ et, après accélération sous une tension de 1 kV, elles sont animées d'une vitesse \vec{v} constante. Leur densité volumique est notée n .

1. Déterminer le champ électrique \vec{E} régnant en tout point de l'espace.
2. Déterminer de même le champ magnétique \vec{B} régnant en tout point de l'espace. Exprimer \vec{B} en fonction de \vec{E} et \vec{v} .
3. Reprendre les calculs précédents dans le référentiel des particules α . Que constatez-vous ? Commenter.
4. On revient dans le référentiel du laboratoire. Exprimer la force volumique due au champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$ subie par les particules α . Commenter le résultat.
5. On note p_0 la pression régnant dans le milieu ambiant. Déterminer la valeur minimale de p_0 garantissant la stabilité du faisceau cylindrique.

Exercice 20 : Effet Meissner-Ochsenfeld dans un supraconducteur

Dans un supraconducteur, la loi d'Ohm locale est remplacée en régime statique par la relation phénoménologique de F. London : $\vec{B} = -\mu_0 \lambda^2 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j}$, où λ est une constante positive caractéristique du milieu, \vec{B} désigne le champ magnétique et \vec{j} est la densité de courant.

1. Quelle est l'équation aux dérivées partielles dont le champ magnétique \vec{B} est solution ? Mettre en évidence une distance δ caractéristique du problème.

Donnée : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{C}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{C}) - \Delta \vec{C}$ pour tout champ de vecteurs \vec{C} .

2. Une plaque supraconductrice occupe tout l'espace compris entre les plans d'équations $z = \pm e$. Des sources extérieures imposent un champ extérieur $\vec{B}_e = B_0 \vec{u}_x$. Dans cette géométrie, on suppose que $\vec{B}(x, y, z) = B(z) \vec{u}_x$.

Déterminer le champ \vec{B} et la densité de courants \vec{j} en tout point du supraconducteur. Tracer les graphes de $B(z)$ et $j(z)$. Montrer que le milieu « expulse » le champ magnétique : c'est l'effet Meissner-Ochsenfeld.

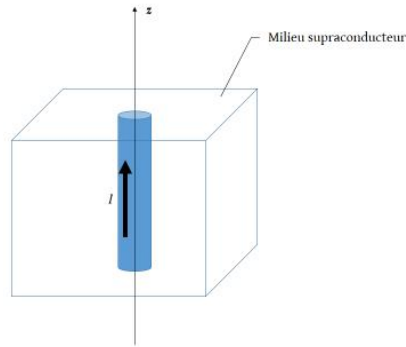
3. Calculer la force subie par une face de la plaque supraconductrice dans l'hypothèse où $\delta \ll e$. En déduire l'existence d'une « pression magnétique » à la surface du supraconducteur.
4. On donne $\lambda = 5 \cdot 10^{-8}$ S.I. Que vaut δ ? Que peut-on dire des courants ?

Exercice 21 : Ecrantage d'un champ magnétique par un matériau supraconducteur

On veut utiliser un milieu supraconducteur pour écranter un fil électrique métallique standard (donc lui-même non supraconducteur), c'est-à-dire réduire au maximum le champ magnétique créé par le courant circulant dans le fil.

Pour cela, on entoure le fil d'un bloc supraconducteur de taille suffisante. Le fil est cylindrique, homogène, de longueur infinie, d'axe Oz et de rayon a . Il est isolé électriquement du supraconducteur, qui l'entoure complètement. Le fil transporte un courant électrique continu I .

Le milieu supraconducteur est régi par la loi de London : $\vec{B} = -\mu_0 \lambda^2 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j}$ où λ est une constante positive caractéristique du milieu.



1. Calculer le champ \vec{B}_{fil} créé par le fil dans les domaines $r \leq a$ et $r \geq a$.

On cherche maintenant à déterminer la répartition du champ magnétique \vec{B} régnant dans le milieu supraconducteur.

2. Quelle est l'équation aux dérivées partielles régissant \vec{B} ? Quelle est la dimension de λ ?
3. Justifier que $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$. Déterminer l'équation différentielle dont est solution la fonction scalaire $B(r)$. Donnée : Pour $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$, $\Delta\vec{B} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial B}{\partial r}\right) - \frac{B}{r^2}\right)\vec{u}_\theta$.
4. La solution de l'équation différentielle $x^2 f''(x) + x f'(x) - (1 + x^2)f(x) = 0$ est une fonction dite de Bessel : $f(x) = A.K_1(x)$. On en donne les propriétés : $K_1(x) \approx \frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow 0^+$; $K_1(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x}$ quand $x \rightarrow +\infty$; la fonction K_1 est monotone décroissante sur \mathbb{R}^{+*} . Montrer que $B(r) = A.K_1\left(\frac{r}{\delta}\right)$. On suppose que $a \ll \lambda$. Déterminer A et δ en fonction des données de l'énoncé.
5. Déterminer les comportements asymptotiques de $B(r)$ pour $r \ll \lambda$ et $r \gg \lambda$. Tracer l'allure de la courbe de $B(r)$.
6. Comparer les deux situations avec et sans supraconducteur. Commenter.
7. Que doit vérifier l'épaisseur du matériau supraconducteur pour que l'écrantage soit efficace ?
8. On utilise du plomb comme matériau supraconducteur. Pb n'est supraconducteur que si sa température T est inférieure à une température critique $T_C = 7,2$ K.

Pour $T < T_C$, λ suit la loi : $\lambda(T) = \frac{\lambda_0}{1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^4}$, où $\lambda_0 = 39$ nm. Comment évoluent les performances du dispositif avec la température ?

Exercice 22 : Sphère supraconductrice en rotation

Une boule de quartz isolant est revêtue d'une fine pellicule de niobium supraconducteur. Elle est mise en rotation à la vitesse angulaire constante $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$. Le but de cet exercice est de déterminer le champ magnétique \vec{B} régnant à l'intérieur de la boule en rotation.

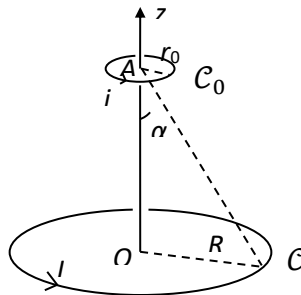
On admet que dans le milieu supraconducteur, le champ magnétique \vec{B} et la densité volumique de courant sont liés par la relation : $\vec{B} = -\frac{m}{ne^2}\text{rot}\vec{j}$, où e est la charge élémentaire de l'électron, m la masse de l'électron, et n le nombre d'électrons par unité de volume de supraconducteur.

1. Vérifier que cette équation est dimensionnellement correcte.

- On suppose que les électrons sont au repos par rapport au milieu supraconducteur. Que vaut la vitesse \vec{v} d'un électron en fonction du vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}$ et de son vecteur position \vec{r} ? En déduire le champ magnétique \vec{B} régnant dans le milieu supraconducteur.
- Que vaut alors le champ magnétique régnant dans la boule de quartz ? Effectuer l'application numérique pour $\Omega = 900 \text{ rad.s}^{-1}$.

Exercice 23 : Interaction magnétique entre deux spires

On considère deux spires de même axe : une première spire C de centre O , de rayon R et d'axe Oz , parcourue par un courant I , et une deuxième spire C_0 de rayon $r_0 \ll R$, de centre A , parcourue par un courant i . On note D la distance OA et α l'angle sous lequel est vue la première spire depuis A . On cherche à calculer la force \vec{F} exercée par C sur C_0 .



1. Première méthode

On note \vec{B} le champ magnétique créé par la spire C en tout point M . Déterminer complètement la géométrie de \vec{B} . Montrer que en tout point de la spire C_0 , les composantes B_r, B_z vérifient : $B_r(r_0, z) \approx -\frac{r_0}{2} \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_{r=0}$. En déduire l'expression de \vec{F} .

Donnée : $\vec{B}(0, z) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{u}_z$ (cf figure).

2. Deuxième méthode

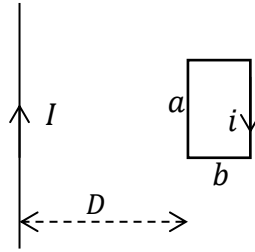
Justifier qualitativement que l'on peut assimiler la petite spire à un dipôle magnétique et déterminer l'expression de son moment magnétique \vec{m} . En déduire l'expression de \vec{F} .

3. Troisième méthode

En assimilant toujours la petite spire à un dipôle, déterminer l'expression de champ \vec{B}_0 créé par celle-ci en tout point de C . Déterminer la force \vec{F}' exercée par C_0 sur C . En déduire l'expression de \vec{F} .

Exercice 24 : Interaction entre un fil rectiligne et une spire rectangulaire

Un fil rectiligne infini, parcouru par un courant I , est disposé dans le vide dans le même plan qu'une spire rectangulaire parcourue par un courant i . Les cotés du rectangle parallèles au fil sont de longueur a et placés aux distances D et $D + b$ du fil. Les deux autres cotés sont de longueur b .



1. Déterminer par un calcul direct la force de Laplace exercée par le fil sur la spire rectangulaire. Donner son expression asymptotique pour $D \gg b$.
2. Déterminer le moment magnétique \vec{m} associé à la spire rectangulaire. En se plaçant dans le cas $D \gg b$, retrouver par une autre méthode l'expression de la Force de Laplace calculée précédemment.

Exercice 25 : Champ magnétique terrestre

On assimile la Terre à une sphère de centre O et de rayon $R_T = 6400$ km. On désire caractériser au mieux le champ magnétique terrestre au niveau de Bordeaux, ville de latitude $\lambda = 44,8^\circ$. Le champ magnétique peut se décomposer en une composante horizontale \vec{B}_h et une verticale \vec{B}_v , au point considéré.

1. Dans une première expérience, on place une boussole horizontalement qui s'oriente naturellement selon \vec{B}_h . On place un fil vertical à une distance d du centre de la boussole, dans la direction indiquée par la boussole, et on fait circuler un courant I . La boussole tourne d'un angle α par rapport à sa précédente position.
Que vaut \vec{B}_h ? *Données :* $\alpha = 20^\circ, d = 10$ cm, $I = 3,6$ A .
2. Dans une seconde expérience, la boussole est placée dans le plan vertical contenant le champ magnétique terrestre $\vec{B} = \vec{B}_h + \vec{B}_v$ et elle n'est soumise qu'à ce dernier. Elle peut tourner librement autour de son axe de rotation horizontal. Elle prend alors une position d'équilibre faisant un angle $\beta = 64,5^\circ$ avec l'horizontale. Que vaut \vec{B}_v ?
3. On cherche à modéliser le champ magnétique par celui d'un moment magnétique \vec{M} placé en O .
 - a) Montrer que les mesures obtenues à Bordeaux pour B_h, B_v sont compatibles avec ce modèle.
 - b) Déterminer la valeur du moment magnétique M dans cette modélisation.