Lycée GUSTAVE EIFFEL Bordeaux Aquitaine

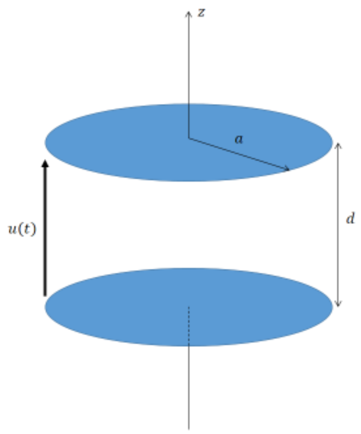
PSI*

Electromagnétisme 2

ARQS et induction

Exercice 1 : Condensateur en régime sinusoïdal

On considère le condensateur plan représenté ci-dessous. Les armatures circulaires, de rayon a, sont distantes de d. On négligera tout effet de bord : $a \gg d$.



Le condensateur est soumis à une tension sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$. On se place en régime quasi-stationnaire, c'est-à-dire que l'on suppose que : $\omega a \ll c$ où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide. On supposera de plus que les lois de l'électrostatique restent applicables dans cette limite (limite électrique de l'ARQS). Cela signifie concrètement que les équations de Maxwell s'écrivent ainsi : $\begin{cases} div\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0} \end{cases}$ et $\begin{cases} div\vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$.

1) Exprimer le champ électrique régnant entre les deux armatures en fonction de $u(t)$ et de a.
2) Montrer qu'il règne dans le condensateur un champ magnétique de la forme $\vec{B}(M,t) = B(r,t)\overrightarrow{u_\theta}$ en coordonnées cylindriques d'axe Oz. On explicitera la fonction $B(r,t)$ en fonction des données de l'énoncé.
3) Comparer les ordres de grandeur des densités volumiques d'énergie électrique et magnétique. En déduire l'expression de l'énergie E_{em} stockée dans le condensateur. Où est-elle localisée ?
4) Effectuer un bilan énergétique. Interpréter.

Exercice 2 : Solénoïde en régime sinusoïdal

Un solénoïde infini, de section circulaire de rayon a, comprend n spires par unité de longueur, chacune étant parcourue par un courant sinusoïdal d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$. On suppose le courant suffisamment lentement variable pour se placer dans l'ARQS (c'est-à-dire que l'on suppose que : $\omega a \ll c$ où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide) et que les lois de la magnétostatique sont applicables (limite magnétique de l'ARQS). Cela signifie concrètement que les équations de Maxwell s'écrivent ainsi :

$$\begin{cases} div\vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} div\vec{E} = 0 \\ \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}.$$

1) Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ régnant à l'intérieur du solénoïde.
2) En déduire qu'il règne dans le solénoïde un champ électrique induit par les variations du courant, de la forme $\vec{E}(M,t) = E(r,t)\overrightarrow{u_\theta}$. Expliciter la fonction $E(r,t)$ en fonction des données de l'énoncé.
3) Comparer les ordres de grandeur des densités volumiques d'énergie électrique et magnétique. En déduire l'expression de l'énergie E_{em} stockée dans une portion de solénoïde de longueur d. Où est-elle localisée ?
4) Effectuer un bilan énergétique. Interpréter.

Exercice 3 : Emission isotrope de charges

Une bille de cuivre fixe et d'assez petite taille pour être considérée comme ponctuelle, placée à l'origine *O* des coordonnées, initialement neutre, émet des électrons de manière isotrope à partir de l'instant t = 0. Le nombre α d'électrons émis par unité de temps est constant, et les électrons sont émis radialement avec une vitesse v_0 constante. On néglige les forces électromagnétiques subies par les électrons.

1) En exprimant la charge comprise entre les sphères centrées en *O* et de rayons *r* et *r + dr*, calculer la densité volumique de charges $\rho(r,t)$ en fonction des données de l'énoncé. En déduire la densité de courant $\vec{j}(r,t)$ (on distinguera les deux cas : $r > v_0 t$ et $r < v_0 t$).

2) Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ et vérifier qu'il dérive d'un potentiel scalaire $V(r,t)$. Montrer que les équations de Maxwell sont compatibles avec un champ magnétique nul. On admet que le champ électromagnétique obtenu est l'unique solution des équations de Maxwell.

3) Ecrire le bilan énergétique local. Commenter.

Exercice 4 : Radioactivité α

Une source radioactive ponctuelle placée au point *O* se désintègre en émettant de manière isotrope des particules alpha (c'est-à-dire des noyaux d'hélium He de charge $+2e$ à la vitesse v_0 supposée constante. On suppose que l'on peut négliger toutes les forces s'exerçant sur les particules alpha après leur émission. Le nombre de noyaux d'hélium émis par unité de temps au niveau de la source radioactive est donné par $\dot{n}(t) = \dot{n}_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

1. Déterminer charge contenue, à l'instant t, dans la portion d'espace délimitée par les sphères de rayons r et $r + \mathrm{d}r$. En déduire l'expression de la densité volumique de charge $\rho(r,t)$ ainsi que l'expression du courant volumique de charge $\vec{j}(r,t)$Y a-t-il conservation de la charge ?
2. Déterminer les champs électrique et magnétique en tout point. Exprimer le résultat en fonction de la charge $q\left(t - \frac{r}{v_0}\right)$ portée par la particule radioactive à l'instant $t - \frac{r}{v_0}$.
3. Effectuer un bilan local d'énergie électromagnétique. Commenter.

Donnée : pour un champ $\vec{a}(r,t) = a(r,t)\vec{u}_r$ en coordonnées sphériques, div $\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a)$.

Exercice 5 : Décharge d'un condensateur

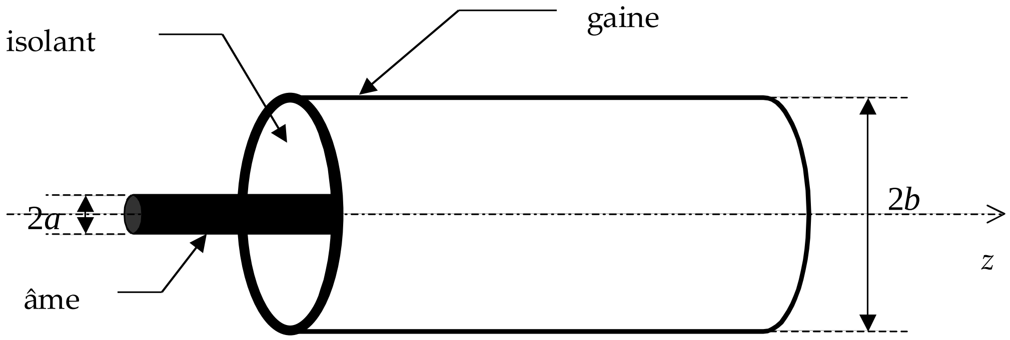
On considère un condensateur cylindrique formé par deux cylindres coaxiaux constitués de métal parfait (le champ électrique y est nul en tout point), de rayons respectifs $R_1 < R_2$ et de hauteurs identiques h, avec $h >> R_2$. Le cylindre intérieur porte la charge q_0, le cylindre extérieur n'est pas chargé. Un gaz isolant sépare les deux cylindres. A la suite d'une décharge, le gaz devient conducteur. Il est alors caractérisé par sa conductivité γ.

1. Expliquer qualitativement pourquoi le gaz peut devenir conducteur. Décrire les phénomènes intervenant à la suite de la décharge.
2. Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ dans chacune des trois zones $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, $r > R_2$. Déterminer également la densité volumique de courant $\vec{j}$ ainsi que le champ magnétique $\vec{B}$.
3. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $\vec{E}$ dans le système. En déduire l'expression de la charge $q_1(t)$ portée par le cylindre intérieur. Que vaut la charge $q_2(t)$ portée par le cylindre extérieur ?
4. Calculer la variation de l'énergie stockée dans le condensateur, ainsi que l'énergie dissipée par effet Joule dans le gaz. Conclure.

Exercice 6 : Inductance linéique d'un câble coaxial

On cherche ici à caractériser le comportement d'un câble coaxial dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires, d'un point de vue magnétique : on supposera donc qu'on peut appliquer les lois de la magnétostatique à tout instant. Celui-ci est constitué de deux cylindres conducteurs coaxiaux de section circulaire, de rayons respectifs *a* et *b*

(*a* < *b*) **de très grande longueur**, séparés par un isolant. Le cylindre central (« l'âme ») est plein tandis que le cylindre extérieur (« la gaine ») est creux :



L'isolant est de l'air assimilé à du vide.

On suppose que l'âme est parcourue par un courant $I(t)$ (le sens positif du courant est donné par l'orientation de l'axe *Oz*). La gaine est, quant à elle, parcourue par un courant opposé $-I(t)$.

1) Déterminer, en exploitant soigneusement les propriétés de symétrie du système, le champ magnétique en tout point de l'espace.
2) Calculer l'énergie magnétique contenue dans le champ magnétique, par unité de longueur de câble.
3) En déduire l'expression littérale et la valeur numérique de l'inductance propre linéique $\mathcal{L}$ du câble.
   Données : a = 0,43 mm ; b = 1,47 mm ; $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}.

Exercice 7 : Rayon classique de l'électron

L'électron est maintenant en mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v} = v\overrightarrow{e_z}$. On prend la position de l'électron à l'instant t_0 où l'on fait l'étude comme origine O des coordonnées. On utilise les coordonnées sphériques (r, θ, φ). On admet que le champ magnétique créé par l'électron en mouvement en un point M extérieur à l'électron à l'instant t_0 s'écrit : $\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 ev\sin\theta}{4\pi r^2}\overrightarrow{u_\varphi}$.
On suppose aussi que le champ magnétique est nul à l'intérieur de l'électron.

1) Justifier la géométrie du champ $\vec{B}$.

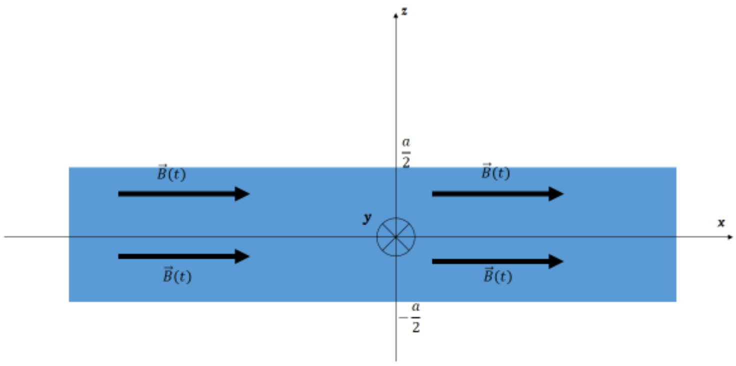
2) Expliquer le mode de calcul de l'énergie magnétique stockée dans champ $\vec{B}$.

Montrer que : $U_{mag} = \frac{\mu_0 e^2 v^2}{12\pi R}$.

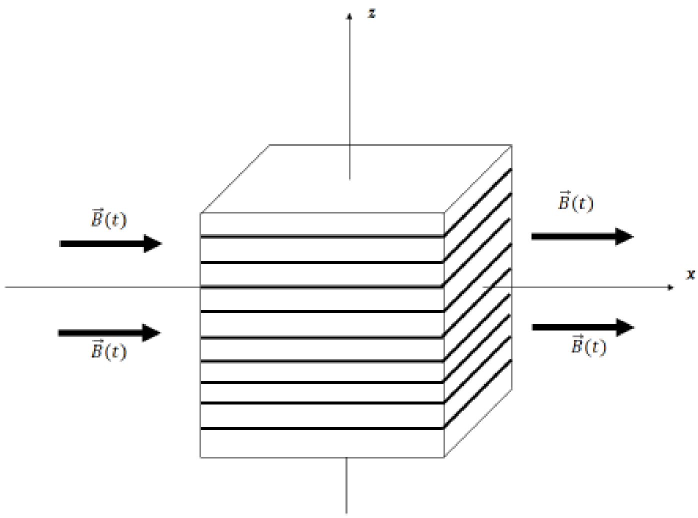
3) Pouvez-vous en déduire une estimation du rayon R de l'électron ? Comparer au résultat trouvé en électrostatique.

Exercice 8 : Courants de Foucault dans un milieu feuilleté

On considère une plaque de cuivre conductrice d'épaisseur *a*, délimitée par les plans d'équations $z = \frac{a}{2}$ et $z = -\frac{a}{2}$. Cette plaque est supposée infinie selon les directions *Ox* et *Oy*. Elle est plongée dans un champ magnétique uniforme sinusoïdal donné par : $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$. On donne la conductivité du cuivre : $\sigma = 6.10^7 \Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$.

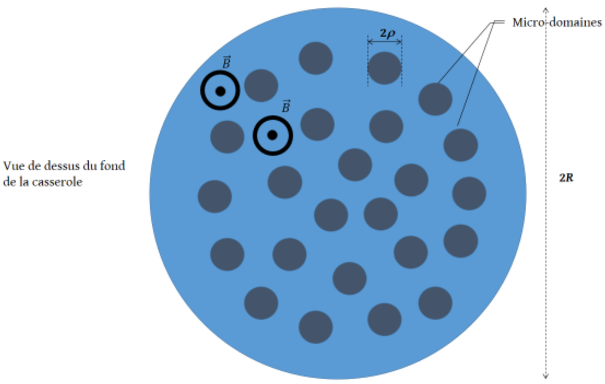


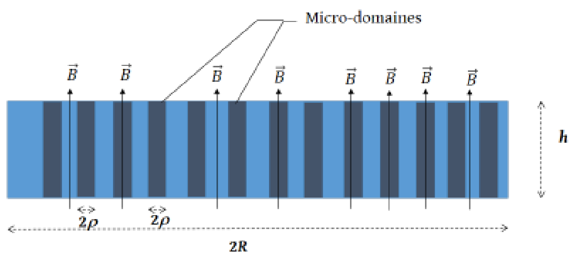
1) Justifier que le cuivre est le siège d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'une densité de courant $\vec{j}$.
2) Calculer $E(z,t)$ et $j(z,t)$ en tout point de l'espace. Représenter l'amplitude $j_0(z)$ de $j(z,t)$ en fonction de *z*. Commenter.
3) Calculer la puissance moyenne dissipée par effet Joule, par unité de volume de matériau.
4) En déduire que la puissance moyenne dissipée dans un échantillon d'épaisseur *a* et de section *S* s'écrit : $P_{Joule} = \frac{\sigma\omega^2 B_0^2}{24} S a^3$. Calculer numériquement cette puissance dissipée.
   Données : $B_0 = 1$ T, $f = 50$ Hz, $a = 1$ cm, $S = 10$ cm^2.
5) On considère un cube de cuivre feuilleté, c'est-à-dire, constitué d'un empilement de *N* feuilles de cuivre minces, isolées les unes des autres. Ce cube est soumis au champ $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$. Comparer les pertes par effet Joule dans le cas où le cube est feuilleté aux pertes par effet Joule dans le cas où le cube serait massif. Montrer l'intérêt du feuilletage.



Exercice 9 : Plaque à induction

On considère une plaque de cuisson à induction de rayon R = 10 cm. Cette plaque crée au voisinage de sa surface un champ magnétique uniforme, sinusoïdal de fréquence f = 25 kHz et d'amplitude B_0 = 1 T, perpendiculaire à la plaque. On pose sur cette plaque une casserole dont le fond métallique de conductivité $\sigma = 10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1}$ est constitué de micro-domaines cylindriques de rayon r = 50 µm, de hauteur h = 1 mm (épaisseur du fond de la casserole) ; ces micro-domaines sont isolés les uns des autres et leurs axes sont tous parallèles à la direction du champ magnétique (axe Oz) (donc perpendiculaires à la plaque). Leur disposition est la plus compacte possible (ce que ne reflètent pas les figures).





Vue en coupe du fond de la casserole

1) On considère un micro-domaine d'axe Oz, plongé dans le champ magnétique $\vec{B} = B_0\cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$. Calculer le champ électrique induit par les variations temporelles de $\vec{B}$ dans ce micro-domaine en en justifiant soigneusement la géométrie.
2) Donner l'expression de la puissance fournie par le champ électromagnétique à l'unité de volume d'un milieu conducteur, siège d'une densité de courant $\vec{j}$. En déduire que la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans un micro-domaine s'écrit : $P_{domaine} = \frac{\pi}{16}\sigma h \rho^4 B_0^2 \omega^2$.
3) Que vaut la puissance moyenne totale dissipée par effet Joule dans le fond de la casserole ? Effectuer l'application numérique. Commenter.
4) Quel est l'intérêt d'utiliser une casserole multi-domaines ? Que se passerait-il dans le cas d'une casserole mono-domaine ?

Exercice 10 : Courants de Foucault dans un conducteur cylindrique

On considère un barreau conducteur cylindrique d'axe Oz, de rayon a, de conductivité γ, placé dans un champ magnétique $\vec{B}_0(t) = B_0\cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$. On se place dans le cadre de l'ARQS magnétique.

1) On observe que la température du cylindre augmente à partir du moment où le champ magnétique existe. Expliquer qualitativement le phénomène. Parmi les équations de Maxwell, laquelle traduit-elle ce phénomène ?
2) Calculer le champ électrique induit $\vec{E}_0(r,t)$ en en précisant soigneusement la géométrie. Que vaut son déphasage par rapport à $\vec{B}_0(t)$?
3) Calculer la densité volumique de courants $\vec{j}_0(r,t)$ qui apparaissent dans le conducteur (courants de Foucault). Quelle est la puissance moyenne dissipée par effet Joule par ces courants dans une portion de conducteur de longueur h ?
4) Les courants volumiques $\vec{j}_0(r,t)$ créent un champ magnétique $\vec{B}_1(r,t)$ variable, et donc source d'un champ électrique induit $\vec{E}_1(r,t)$. Calculer ces deux champs à l'intérieur du conducteur. À quelle condition a-t-on $\|\vec{B}_1\| \ll \|\vec{B}_0\|$ et $\|\vec{E}_1\| \ll \|\vec{E}_0\|$?
5) On remplace le barreau par de nombreux barreaux de rayons $a' \ll a$ d'axes parallèles à Oz, isolés électriquement, et disposés de façon à couvrir la surface maximale à l'intérieur d'une section droite d'aire πa^2 du barreau précédent. Quelle est la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans une portion de ce système de longueur h ? Conclure.

Donnée : $\overrightarrow{rot}\vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$ en cylindriques.

Exercice 11 : Variations de la résistance et de l'inductance propre d'un solénoïde bobiné sur un tube de cuivre

On considère un tube de cuivre creux, cylindrique d'axe Oz, de longueur ℓ très grande devant son rayon a. L'épaisseur du cuivre e est très faible devant le rayon a. On a donc : $e \ll a \ll \ell$. On donne la conductivité du cuivre : $\sigma = 6.10^7\,\Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$.

Sur le tube de cuivre sont bobinées N spires jointives, d'épaisseur négligeable, parcourues par un courant $i(t) = I\cos(\omega t)$. On note r la résistance du fil bobiné.

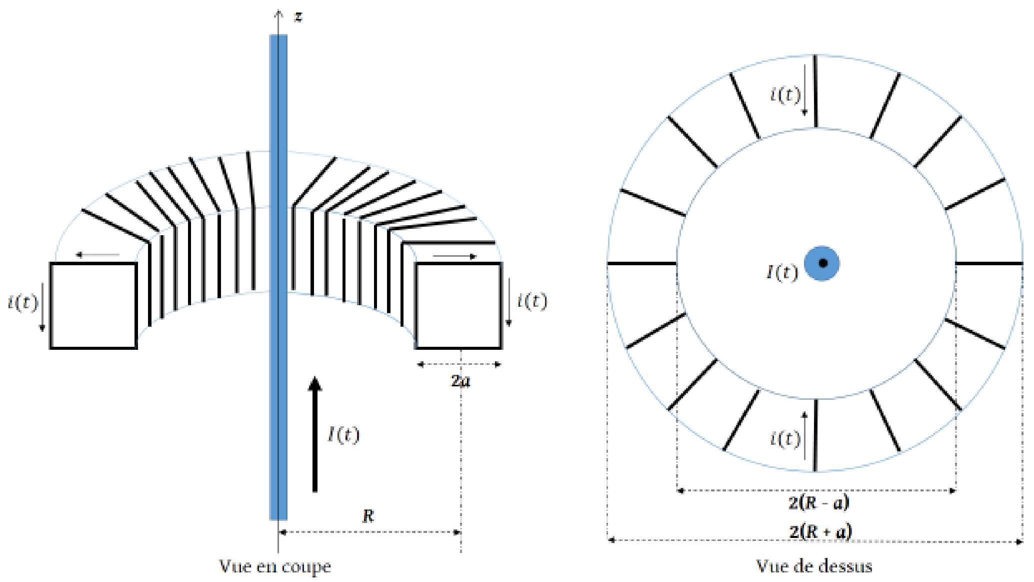
1) Quel est le phénomène responsable de l'apparition d'une densité de courant $\vec{j}(M,t)$ au sein du cuivre ? Quelle est la géométrie de ces courants ?
2) Exprimer le champ magnétique régnant à l'intérieur du tube creux en fonction de μ_0, N, ℓ, e, $i(t)$ et $j(t)$.
3) On admet que ce champ magnétique crée en tout point un champ électrique induit de la forme $\vec{E}(M,t) = E(r,t)\overrightarrow{u_\theta}$. Justifier la géométrie de $\vec{E}$. Calculer $E(a,t)$.
4) En déduire que la représentation complexe de $j(t)$, notée $\underline{j(t)}$ s'écrit :
$\underline{j(t)} = -i\frac{N}{\ell e}\frac{\omega}{\omega_0 + i\omega} I\exp(i\omega t)$, où $\omega_0 = \frac{2}{\mu_0\sigma a e}$.
5) Montrer que ce dispositif est finalement équivalent à une bobine caractérisée par une résistance équivalente et une inductance équivalente données par :
$$\begin{cases} R_{eq}(\omega) = r + L_0\omega_0\frac{\omega^2}{\omega^2+\omega_0^2} \\ L_{eq}(\omega) = L_0\frac{\omega_0^2}{\omega^2+\omega_0^2} \end{cases}, \text{ où } L_0 = \mu_0 N^2\frac{\pi a^2}{\ell}.$$

6) a) Que représente la grandeur L_0 ? Calculer numériquement la fréquence f_0 (on prendra $a = 2$ cm et $e = 2$ mm).
   b) Tracer l'allure des courbes représentatives de $R_{eq}(\omega)$ et $L_{eq}(\omega)$. Commenter.

Exercice 12 : Pince ampèremétrique

Une bobine torique de section carrée de côté 2a, de rayon moyen *R*, comportant *N* spires jointives est fermée sur un ampèremètre de résistance négligeable. La bobine torique a une résistance équivalente notée *r*.

La bobine enserre un fil conducteur que l'on supposera rectiligne et infini, et dont l'axe coïncide avec celui de la bobine torique ; le conducteur est parcouru par un courant $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Ce courant variable induit un courant $i(t)$ dans la bobine torique. Vu la symétrie du problème, on travaille en coordonnées cylindriques d'axe *Oz*.



1) Calculer, en exploitant soigneusement les symétries, le champ magnétique $\vec{B}_{bobine}(r,\theta,z,t)$ créé par la bobine en tout point, en fonction, notamment, de N, $i(t)$ et *r*.
2) Calculer, de même, le champ magnétique $\vec{B}_{fil}(r,\theta,z,t)$ créé par le fil en tout point, en fonction, notamment, de $I(t)$ et *r*.
3) Donner la définition de l'inductance mutuelle *M* entre deux circuits et de l'inductance propre *L* d'un circuit. Montrer que l'inductance propre de la bobine torique et l'inductance mutuelle entre le fil et la bobine torique s'écrivent : $\begin{cases} L = \frac{\mu_0 N^2 a}{\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R-a}\right) \\ M = \frac{\mu_0 N a}{\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R-a}\right) \end{cases}$. Commenter ces expressions, et en particulier, la valeur du rapport $\frac{L}{M}$.
4) Calculer l'intensité complexe $\underline{i}(t)$ du courant dans la bobine en régime sinusoïdal forcé (régime imposé par le fil central, toujours parcouru par $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$).
5) Que devient le rapport $\left|\frac{\underline{i}}{\underline{I}}\right|$ lorsque $L\omega \gg r$?
   On donne *N* = 10000 ; *R* = 6 cm ; *a* = 1 cm ; *f* = 50 Hz ; *r* = 0,2 W. Pourquoi peut-on qualifier le dispositif de transformateur de courant ? Pourquoi est-ce un appareil très utilisé pour la mesure des forts courants ?

Exercice 13 : Moment cinétique du champ électromagnétique

On considère un cylindre isolant d'axe Oz , de rayon R, de très grande longueur, uniformément chargé en surface. Ce cylindre porte la charge λ par unité de longueur de cylindre. Sur l'axe de ce cylindre se trouve un fil infini uniformément chargé, portant la charge $-\lambda$ par unité de longueur. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}(t) = B(t)\overrightarrow{u_z}$ uniforme parallèle à l'axe Oz. Le champ magnétique est initialement nul, et atteint la valeur $\vec{B}(\tau) = B_0\overrightarrow{u_z}$ à l'instant τ. On adopte les coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe Oz. On néglige tout effet de bord. L'ensemble est assujetti à une liaison pivot idéale d'axe Oz.

1) Montrer que les variations du champ magnétiques induisent un champ électrique que l'on calculera en fonction des données.
2) En déduire que le cylindre acquiert un moment cinétique par unité de longueur donné par : $\vec{L} = -\frac{\lambda R^2}{2} B_0\overrightarrow{u_z}$. Commenter ce résultat. Quel est le mouvement du cylindre ?

3) On cherche maintenant à retrouver ce résultat en attribuant au champ électromagnétique un moment cinétique (par analogie avec l'énergie du champ, par exemple).
   a) Calculer le champ ***<u>électrostatique</u>*** $\overrightarrow{E_S}(r)$ créé en tout point de l'espace par la distribution de charges cylindrique (cylindre chargé en surface ***<u>et</u>*** fil infini) en fonction notamment de la charge linéique λ.
   b) Quelle est la dimension du vecteur $\vec{g} = \epsilon_0\overrightarrow{E_S} \times \vec{B}$? Quel sens physique peut-on dès lors attribuer au vecteur $\vec{\ell} = \vec{r} \times \left(\epsilon_0\overrightarrow{E_S} \times \vec{B}\right)$?
   c) Calculer la quantité $\iiint_{espace} \vec{\ell}\, d^3V$. La comparer à l'expression du moment cinétique obtenue en 2) pour le cylindre. Interpréter.

Exercice 14 : Interprétation classique du diamagnétisme

Le diamagnétisme est une propriété que possèdent certains corps comme les gaz rares ou encore l'azote liquide : plongés dans un champ magnétique extérieur, ils acquièrent un moment magnétique macroscopique **proportionnel** au champ appliqué mais **de sens opposé**.

On se propose ici de montrer de la manière la plus « rustique » que ce phénomène relève des lois de l'induction.

1) Un des modèles les plus simples de l'atome est le modèle de Bohr. Celui-ci suppose, entre autres, qu'un électron est animé d'un mouvement circulaire uniforme (de rayon *r* et de vitesse *v*) autour du noyau.

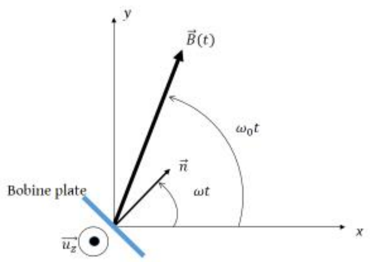
Montrer que l'électron en orbite sur sa trajectoire est équivalent, en moyenne sur un temps long devant sa période de révolution, à un moment magnétique $\vec{\mu}$ proportionnel à son moment cinétique $\vec{L}$ par rapport au noyau : $\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L}$ où $-e$ est la charge de l'électron et m sa masse.

2) On établit lentement un champ magnétique extérieur $\vec{B}(t) = B(t)\overrightarrow{u_z}$ uniforme, perpendiculaire au plan de l'orbite circulaire de l'électron (on suppose que la nature circulaire et le rayon *r* de l'orbite ne sont pas modifiés par l'application du champ). L'axe *Oz* est l'axe passant par le noyau, perpendiculaire au plan de la trajectoire (et donc colinéaire à $\vec{L}$, $\vec{\mu}$ et $\vec{B}(t)$).

a) Calculer le champ électrique induit par les variations temporelles de $\vec{B}(t)$ en en justifiant soigneusement la géométrie.
b) Calculer la variation $\overrightarrow{\Delta L}$ du moment cinétique de l'électron entre l'instant initial où $\vec{B} = \vec{0}$ et l'instant final où $\vec{B} = \overrightarrow{B_0}$.
c) En déduire que l'atome a acquis un moment magnétique supplémentaire $\overrightarrow{\Delta\mu}$ **proportionnel** à $\overrightarrow{B_0}$, mais **de sens opposé**.
d) Le sens de rotation initial de l'électron modifie-t-il le résultat ? Conclure quant à l'établissement d'un moment magnétique macroscopique de type diamagnétique.

Exercice 15 : Machine asynchrone

Une bobine plate comportant N spires, de surface S, de résistance R et d'inductance L, peut tourner librement autour de l'axe Oz. La bobine est en court-circuit. Elle est soumise à un champ magnétique uniforme dont la norme reste égale à B_0 mais dont la direction tourne au cours du temps :
$\vec{B}(t) = B_0\vec{u}(t)$ où $\vec{u}(t)$ est un vecteur unitaire orthogonal à Oz faisant l'angle $\omega_0 t$ avec le vecteur $\overrightarrow{u_x}$. La bobine est animée d'un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Oz. On pose $(\overrightarrow{u_x}, \vec{n}) = \omega t$ où $\vec{n}$ est le vecteur normal aux spires de la bobine plate (à l'instant $t = 0$, les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ coïncident.)



1) Que vaut à l'instant t l'angle $\alpha(t) = (\vec{n}, \vec{B})$? Calculer la f.é.m. $e(t)$ induite par la variation temporelle du flux $\Phi(t)$ du champ $\vec{B}(t)$ à travers les N spires de la bobine plate.
2) En régime établi, cette f.é.m. engendre dans la bobine court-circuitée un courant sinusoïdal $i(t) = I\sin(\alpha(t) + \varphi)$, où φ est une constante.
   a) Dessiner le schéma électrique équivalent.
   b) Montrer que $I\exp(j\varphi) = \frac{\Phi_0(\omega_0-\omega)}{R+jL(\omega_0-\omega)}$, où Φ_0 est une constante que l'on exprimera en fonction de N, B_0 et S.
   c) En déduire les expressions de I et de $\cos\varphi$ en fonction des données de l'énoncé.
3) a) Exprimer le moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ de la bobine plate.
   b) En déduire que la valeur moyenne du moment des actions de Laplace subies par la bobine est donnée par : $\Gamma = \frac{\Phi_0^2}{2}\frac{R(\omega_0-\omega)}{R^2+L^2(\omega_0-\omega)^2}$.
   c) Tracer l'allure des variations de Γ en fonction de ω. A quelle condition la machine asynchrone fonctionne-t-elle en moteur ? Pourquoi la qualifie-t-on ainsi ? La machine peut-elle démarrer de manière autonome ?
   d) On suppose que le moteur a à vaincre un couple résistant de norme constante Γ_r, en régime permanent. Etudier la stabilité du fonctionnement.

Exercice 16 : Lévitation magnétique

On considère un long solénoïde d'axe *Oz* parcouru par un courant $I(t)$. On étudie le comportement d'une spire circulaire conductrice de rayon $a = 0{,}5\ cm$. La spire, d'axe *Oz*, est située à la hauteur h ($h \gg a$) par rapport à la face supérieure du solénoïde, dans un plan perpendiculaire à l'axe *Oz*. Elle a une masse $m = 0{,}87\ \mathrm{g}$, une inductance propre $L = 10^{-8}\ \mathrm{H}$ et une résistance $R = 10^{-4}\ \Omega$. Le courant $I(t)$ est sinusoïdal, de fréquence $f = 1\ \mathrm{kHz}$ et d'amplitude I_m : $I(t) = I_m \cos(\omega t)$. On suppose qu'à cette fréquence, la spire subit les effets des forces de Laplace moyennées sur le temps.

On donne, en un point proche de l'axe *Oz*, et en coordonnées cylindriques d'axe *Oz*, l'expression du champ magnétique créé par le solénoïde à l'ordre 1 en *r* :
$\vec{B}(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_0}{dz}\cos(\omega t)\,\overrightarrow{u_r} + B_0(z)\cos(\omega t)\,\overrightarrow{u_z}$, où $B_0(z)$ désigne la valeur algébrique du champ magnétique créé par le solénoïde en un point de cote *z* situé sur l'axe *Oz*. L'origine de l'axe *Oz* est choisie sur la face supérieure du solénoïde. On donne d'autre part : $\frac{dB_0}{dz}(h) = k' I_m$ et $B_0(h) = k I_m$, où $k' = -1{,}1.10^{-9}\ \mathrm{H.m^{-3}}$ et $k = 6{,}3.10^{-4}\ \mathrm{H.m^{-2}}$.

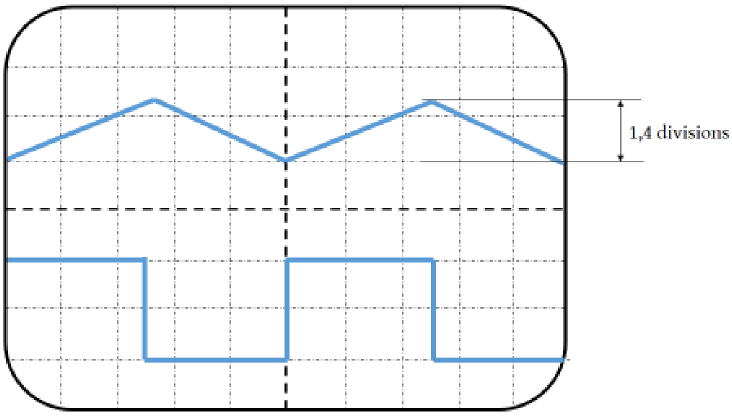
1) Calculer le courant induit $i(t)$ dans la spire.
2) Montrer que la force de Laplace moyenne subie par la spire s'écrit
   $\langle \vec{F} \rangle = -\frac{\pi^2 a^4 k k' I_m^2}{2L\left(1+\frac{R^2}{L^2\omega^2}\right)}\overrightarrow{u_z}$.
3) A quelle condition sur I_m la spire lévite-t-elle ? Qu'en dîtes-vous ? Quel type de matériau a-t-on intérêt à utiliser ?
4) L'équilibre est-il stable ?

Exercice 17 : Mesure d'une inductance mutuelle

On considère deux bobines plates identiques, formées de *N* spires circulaires de rayon *a*, d'inductance *L*, que l'on place de façon que les deux bobinages soient coaxiaux, de même sens d'enroulement. La distance entre leurs centres, repérée le long de l'axe commun *Oz*, vaut *d*.

On cherche à mesurer le couplage entre les deux bobines. Pour cela, on soumet l'une d'elles, dite la première, et notée (B_1), à une tension triangulaire délivrée par un GBF et on compare à l'aide d'un oscilloscope cette tension avec la tension induite dans l'autre bobine, notée (B_2), celle-ci étant en circuit ouvert. On a par ailleurs branché en série entre le générateur de fonction (GBF) et la première bobine (B_1) une résistance R' = 100 Ω . On néglige la résistance *R* des bobines.

1) Faire le schéma du montage utilisé, en précisant les connexions de l'oscilloscope.
2) Les traces observées à l'oscilloscope sont les suivantes :



Les réglages de l'oscilloscope sont les suivants :

- Balayage horizontale : 0,2 ms/div
- Trace supérieure : 1 V/div (on y visualise la tension délivrée par le GBF)
- Trace inférieure : voir tableau ci-dessous.

Les deux traces ont été décalées verticalement pour plus de lisibilité, mais les deux signaux sont de valeur moyenne nulle.
L'amplitude crête-à-crête de la trace supérieure (1,4 divisions) est notée ΔE, et la période des signaux est notée T.

En faisant varier la distance *d* entre les bobines, on relève les valeurs suivantes pour l'amplitude crête-à-crête *A* de la tension induite dans la bobine (B_2), exprimées en divisions de l'écran :

Calibre (mV/div)	10			5			2		1
d (cm)	4	5	6	7	8	10	12	16	20
A	4,3	3,3	2,6	4,3	3,4	2,3	4	2,1	2,4

a) Ecrire les deux équations régissant les circuits couplés.

b) Montrer que la mutuelle inductance *M* est donnée par $M = \frac{R'T}{4}\frac{A}{\Delta E}$.

c) Calculer alors pour chaque valeur de *d*, la valeur de *M* en mH.

3) La bobine (B_1), parcourue par le courant I_1, crée un un point *M* de son axe *Oz* le champ magnétique : $\overrightarrow{B_{axe}}(M) = B_0(z)\overrightarrow{u_z}$ où $B_0(z) = I_1\varphi(z)$. Déterminer $\varphi(z)$.

4) On donne, en un point proche de l'axe, et en coordonnées cylindriques d'axe *Oz*, l'expression du champ magnétique créé par (B_1), à l'ordre 1 en *r* :
$\vec{B}(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_0}{dz}\overrightarrow{u_r} + \left(B_0(z) - \frac{r^2}{4}\frac{d^2B_0}{dz^2}\right)\overrightarrow{u_z}$.

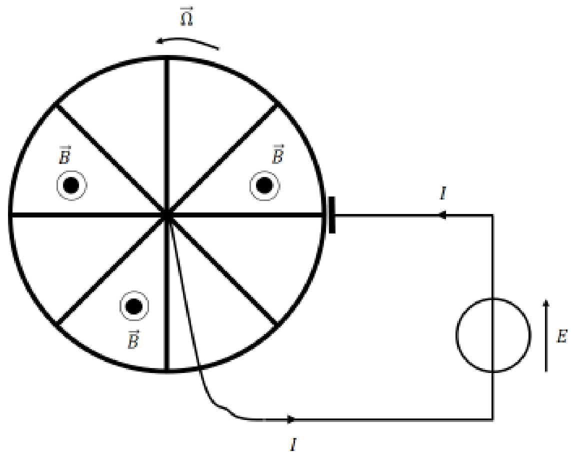
a) Calculer le flux créé par la bobine (B_1) à travers la bobine (B_2) dans l'hypothèse où *d* est grande devant le rayon *a.*

b) En déduire l'expression de la mutuelle inductance *M* en fonction de *a*, *N*, et $\varphi(d)$.

c) Pour les bobines utilisées ici, de rayon $a = 7$cm, comportant 100 spires, le modèle ci-dessus donne $M = 43$ µH pour $d = 20$ cm, et $M = 0{,}16$ mH pour $d = 5$ cm. Ces valeurs théoriques sont-elles en accord avec l'expérience ? Commenter.

Exercice 18 : Moteur à courant continu à entrefer plan

On considère un moteur à courant continu à entrefer plan, de type AXEM®. Le rotor (partie mobile) est constitué de N rayons conducteurs de longueur a fermés sur une circonférence conductrice d'axe Oz (sur la figure ci-dessous, $N = 8$). Ce rotor, de résistance équivalente globale R, est connecté par l'intermédiaire de contacts glissants à un générateur de tension de fém E ; le courant continu I ($I > 0$) pénètre dans le rotor sur la circonférence et est collecté au voisinage de l'axe. Le rotor, plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B\overrightarrow{u_z}$ (avec $B > 0$) créé par un aimant permanent (c'est le stator), est en rotation à la vitesse angulaire Ω autour de l'axe Oz.



Le rotor subit un couple de frottement $-K$ ($K > 0$) constant dû aux contacts glissants. Le moteur est couplé à une charge qu'il entraîne en rotation ; la charge exerce sur le rotor un couple de frottement fluide $-C\Omega$ (où $C > 0$).

1) Montrer que le moment résultant des actions de Laplace exercées sur le rotor vaut, en projection sur l'axe Oz : $\mathcal{M} = \Phi_0\, I$ où l'on exprimera la constante Φ_0 en fonction de B et a.
2) Exprimer la puissance des actions mécaniques de Laplace.
3) Exprimer la fém induite e dans le rotor en fonction de Φ_0 et Ω.
4) Donner l'expression du moment $\mathcal{M}$ en fonction de Ω et E, notamment. Tracer la caractéristique du moteur $\mathcal{M}(\Omega)$ à tension d'alimentation E imposée.
5) En régime permanent de rotation, donner la relation liant $\mathcal{M}$, K, C et Ω. En déduire graphiquement le point de fonctionnement nominal $(\mathcal{M}_n, \Omega_n)$.
6) Les données constructeur précisent les valeurs nominales suivantes :
   $\Omega_n = 3000$ tours/min ; $E = 172$ V ; $R = 0{,}9\ \Omega$; $\Phi_0 = 0{,}51$ N. m. A^{-1} ;
   $K = 0{,}12$ N. m.
   a) Calculer le couple nominal $\mathcal{M}_n$ ainsi que le courant nominal I.
   b) Calculer la puissance mécanique disponible sur l'arbre, ainsi que la puissance électrique consommée par le moteur. Que vaut le rendement ?