

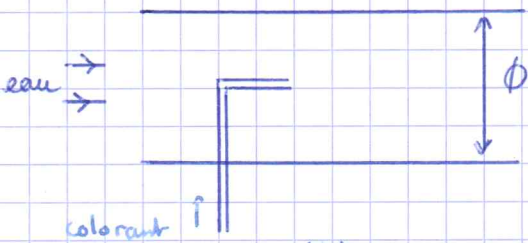
MF2: ECOULEMENTS INTERNES ET EXTERNES

I - Ecoulements internes, incompressibles et homogènes dans 1 conduite cylindrique

1. Ecoulements laminaires et turbulents

(a) Expérience d'Osborne Reynolds (1883)

⚠ Colorant et eau : même vitesse



→ Reynolds fait varier D_v (i.e. la vitesse)
→ ϕ

(b) Différents régimes d'écoulement en fonction de Re

$$Re = \frac{\rho U \phi}{\eta}$$

U : vitesse moyenne

(i) $Re \lesssim 2000$: \vec{e}^t bien ordonné, en filaments
↳ \vec{e}^t laminaire, pas de mélange de colorant avec l'eau.

(ii) $2000 \lesssim Re \lesssim 3000$: régime de transition : déformation de la tache de colorant avec app. de structures tourbillonnaires.

(iii) $Re \gtrsim 3000$: \vec{e}^t turbulent

→ \vec{e}^t chaotique avec fortes fluctuations spatiales et temp. du champ \vec{v}
→ fort mélange dû à la convection.

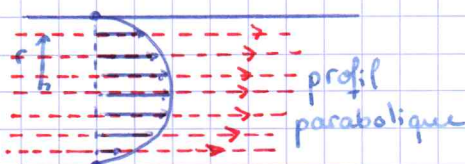
⊙ Quelques OG

→ eau ; $\phi = 10 \text{ cm}$: $Re \sim 2000 \rightarrow U = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{0,1} \sim 2 \text{ cm/s}$
⇒ $\vec{e}^t \sim$ très turbulent

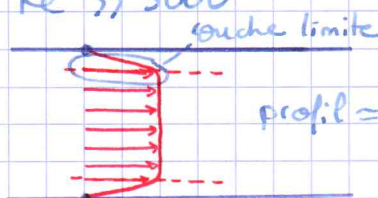
→ eau ; $\phi = 1 \text{ mm}$: $Re \sim 2000 \rightarrow U = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{10^{-3}} \sim 2 \text{ m/s}$
⇒ \vec{e}^t le + svlt laminaire

(c) Profils de vitesse selon Re

$Re < 2000$



$Re \gg 3000$



$$\frac{\partial v_x}{\partial r} = 0$$

pas de contrainte visqueuse hors couche limite

$$\vec{v} = v_x(r) \vec{u}_x$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} < 0 \Rightarrow \text{contraintes visqueuses exercées}$$

(d) Similarité d'écoulements et Re

→ le régime d'écoulement est défini par la valeur de Re

⇒ 2 écoulements de même géométrie et de même Re sont dits similaires

ex: maquette échelle $\frac{1}{10}$ avec le même fluide → Re = cste si on multiplie U par 10 ou travaille de l'eau plutôt que l'air $\frac{v_{eau}}{v_{air}} \neq \frac{1}{10}$

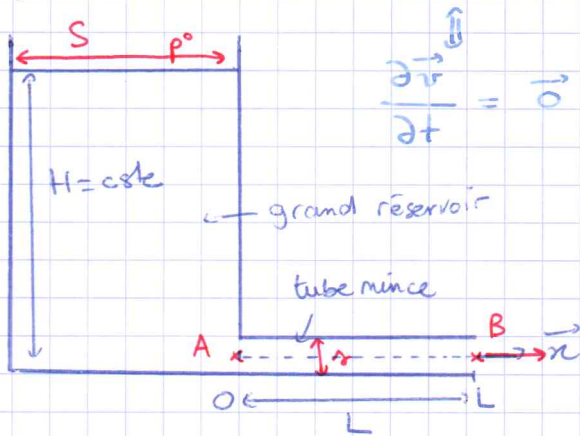
2. Vitesse débitante = vitesse moyennée sur une section du tube

$$U \hat{=} \frac{1}{S} \iint_S \vec{v}(M) \cdot \vec{u}_x dS \quad \text{i.e. } U = \frac{Dv}{S}$$

3. Chute de pression dans une conduite horizontale à $Re \ll 2000$

(a) Loi de Hagen - Poiseuille

- Hypos:
- \vec{g} négligé (tube horizontal et "mince")
 - \vec{e}^t stationnaire et incompressible



$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\text{div } \vec{v} = 0$$

• \vec{e}^t provoqué par une pression à l'entrée / à la sortie:

il faut $P(0) > P(L)$

$$P(A) = P(0) = P^0 + \mu g H$$

$$P(B) = P(L) = P^0$$

$$\rightarrow \Delta P = P(A) - P(B) = \mu g H > 0$$

• On cherche $\vec{v} = v_x(r, x) \vec{u}_x$ avec $\frac{\partial v_x}{\partial r} < 0$

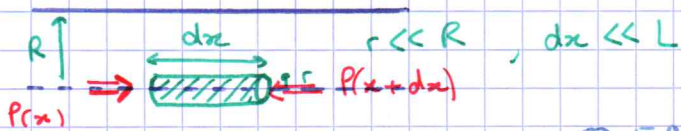
→ incompressibilité: $\text{div } \vec{v} = 0$

$$\text{Donnée: } \text{div } \vec{v}(r, x) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

$$\vec{v}(r, x) = \begin{pmatrix} v_r(r, x) \\ 0 \\ v_x(r, x) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = v_x(r) \vec{u}_x$$

• Contrainte visqueuse

$$\vec{dF}_{r \rightarrow r}^{\text{visc}} = \oplus \eta \frac{dv_x}{dr} dS \vec{u}_x$$



Eq^m du mouvement de la pf:

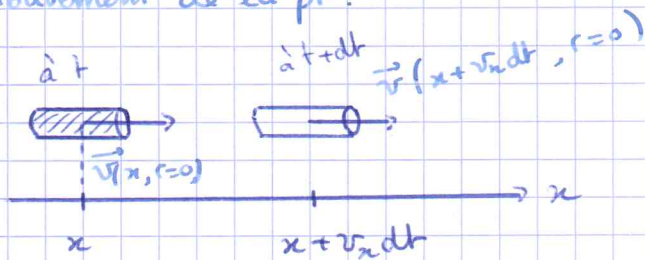
→ Accélération de la pf?

or $v_x(x+v_x dt, r=0) = v_x(x, r=0)$

⇒ la vitesse de la pf. est cste

→ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$

mov^t rect. unif car \vec{e}_c^t stat + incomp.



→ donc le PFD: $\vec{0} = d\vec{F}_{visc}^{ext} + d\vec{F}_{press}^{ext}$

↳ sur l'axe Ox: $0 = \eta \frac{dv_x}{dr} \times dS_{lat} + \underbrace{P(x)\pi r^2 - P(x+dx)\pi r^2}_{\pi r^2 \times (-dx \frac{\partial P(x)}{\partial x})}$

$\frac{dv_x(r)}{dr} = \frac{r}{2\eta} \frac{dP(x)}{dx}$

< 0 < 0

⊙ Champ de pression:

$\frac{dP}{dx} = \frac{2\eta}{r} \frac{dv_x}{dr} \Rightarrow \frac{d^2 P}{dx^2} = 0$

g(x) f(r)

C.L.: $P(0) = P^0 + \frac{\Delta P}{\mu g H}$

$P(L) = P^0$

⇒ $B = P^0 + \frac{\Delta P}{\text{surpression} > 0}$

⇒ $A = -\frac{\Delta P}{L}$

⇒ $P(x) = P^0 + \Delta P \left(1 - \frac{x}{L}\right)$

⊙ Champ des vitesses:

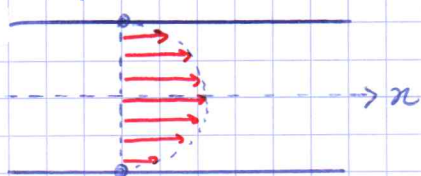
$\frac{dv_x}{dr} = \frac{r}{2\eta} \frac{dP}{dx} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r$

→ $v_x(r) = -\frac{\Delta P}{2\eta L} \frac{r^2}{2} + K$

cl $v_x(R) = 0$ (non gliss. sur la paroi)

→ $v_x(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2)$ profil parabolique

⊙ Profil des vitesses:



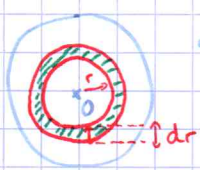
⊙ Débit de volume:

$\mathcal{D}_v = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{u}_x dS = \iint_S v_x(r) dS$

ne dépend que de r

Q: quel dS choisir?

$R_{||}$: $dS =$ lien géo à $r = \text{cste}$, à dr près



$$dS = 2\pi r dr$$

$$D_v = \int_0^R \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) \times 2\pi r dr = \frac{\Delta P \times \pi}{2\eta L} \left[R^2 \times \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right]$$

$$D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta P \quad \text{loi de Hagen - Poiseuille}$$

$$D_v \propto \Delta P$$

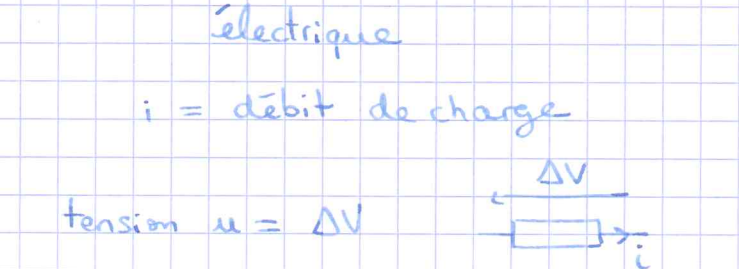
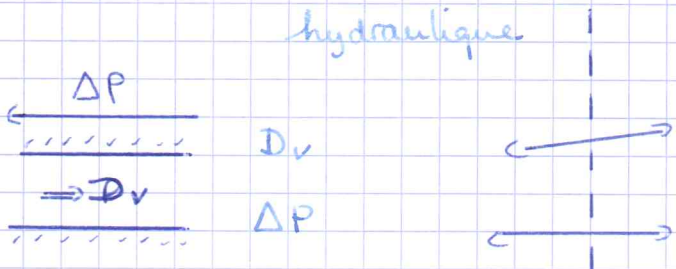
→ chute de pression ΔP :

- $\Delta P \propto D_v$
- $\Delta P \propto L$
- $\Delta P \propto \eta$
- $\Delta P \propto \frac{1}{R^4}$

● vitesse débitante:

$$U = \frac{D_v}{S} = \frac{R^2}{8\eta L} \Delta P$$

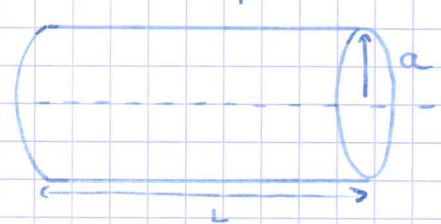
(b) Résistance hydraulique



$$\Delta P = R_h D_v$$

$$\text{Cond. Ohmique: } u = Ri$$

$$R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \propto L \quad \eta$$

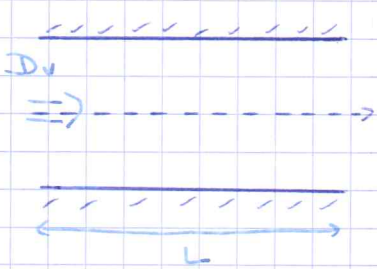


$$R = \frac{\rho L}{\pi a^2} \propto L$$

conductivité
 $\sigma = \frac{1}{\rho}$
 ↑
 résistivité (Ωm)

4. Chute de pression dans une conduite horizontale en régime quelconque

(a) Coefficient de friction → détermine la chute de pression



- ds ts les cas: $\Delta P \propto L$
- $[\Delta P] = Pa = J \cdot m^{-3}$

⇒ on va exprimer ΔP en fonct° de l'énergie cinétique volumique moyenne

$$\Rightarrow \Delta P \propto \frac{\mu U^2}{2}$$

déf: coeff^t de friction f

$$\Delta P \hat{=} f \times \frac{\mu U^2}{2} \times \frac{L}{\phi}$$

avec $f = f\left(Re, \frac{\epsilon}{\phi}\right)$

ϵ : rugosité absolue
 ϵ/ϕ : rugosité relative

g) Cas d'éc. laminaire (loi de Poiseuille)

$$\hookrightarrow \Delta P = \frac{8\eta}{\pi R^4} D_v \times L = \frac{8\eta L}{R^2} U$$

$$\text{or } f \hat{=} \frac{\Delta P}{L} \times \phi \times \frac{1}{\frac{\mu U^2}{2}} = \frac{8\eta U}{\frac{\phi^2}{4}} \times \phi \times \frac{2}{\mu U^2} = 64 \times \frac{\eta}{\mu \phi U}$$

$$f = \frac{64}{Re} \text{ si } Re \ll 2000$$

(b) Diagramme de Moody (1944)

Re < 2000 : \hookrightarrow réseau d'abaques exp^t : log f en fonct^o de log Re pour \neq valeurs de $\frac{\epsilon}{\phi}$
rég. laminaire

droite de pente -1 $\log f = -\log Re + \text{cte}$

Re \gg 2000 : f = indép^t de Re

rég. turbulent \hookrightarrow ne dépend que de $\frac{\epsilon}{\phi}$

entre les 2 : compliqué

ex : conduite en béton $\phi = 20 \text{ cm}$ $D_v = 10 \text{ m}^3/\text{h}$
 $L = 20 \text{ m}$

Béton grossier : $\epsilon = 0,25 \text{ mm}$ $\frac{\epsilon}{\phi} = \frac{0,25 \cdot 10^{-4}}{0,2} = 1,25 \cdot 10^{-4} \neq 10^{-3}$

$$Re = \frac{U \times \phi}{\nu} = \frac{D_v}{\pi \frac{\phi^2}{4}} \times \frac{\phi}{\nu} = \frac{4 D_v}{\pi \nu \phi} = \frac{4}{\pi} \times \frac{10}{3600} \times 10^6 \times \frac{1}{0,2}$$

$$Re = \frac{200 \cdot 10^6}{\pi \cdot 3,6 \cdot 10^3} \neq 2 \cdot 10^4 \quad f \approx 0,028 \approx 0,03$$

$$\Delta P = f \times \frac{\mu U^2}{2} \times \frac{L}{\phi} = 0,03 \times \frac{10^3 \times 10^{-2}}{2} \times \frac{20}{0,2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ Pa}$$

$$= 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ bar}$$

$$U = \frac{D_v}{\pi \frac{\phi^2}{4}} \cdot \frac{10}{3600} \cdot \frac{1}{4 \cdot 10^{-2}} = \frac{10^3}{\pi \cdot 3,6 \cdot 10^3} \approx 0,1 \text{ m/s}$$

II - Ec^t externe, incompressible et homogène autour d'un obstacle

1 - Comportement d'un écoulement autour d'un obstacle en fonction de Re.
Couche limite

(a) Allure des ldc autour d'une sphère en fonction de Re

Rédefinition de Re : $Re = \frac{\mu \times U \times 2R}{\eta}$

Re \ll 1 : éct ordonné en lames (donc laminaire) } rég.
symétrique amont / aval (pas de sillage) } laminaire

$1 \leq Re \leq 1000$: $\left\{ \begin{array}{l} \text{perte de symétrie par apparition d'un sillage} \\ \text{présentant des tourbillons, mais ldc} \\ \text{encore assez bien définies} \end{array} \right.$



$1000 \leq Re \leq 2 \cdot 10^5$ taille du sillage \uparrow et \vec{e} chaotique ds le sillage
 \vec{e} est turbulent

$Re > 2 \cdot 10^5$ taille du sillage \downarrow (turbulent)

(b) Couche limite : zone de transition

\rightarrow à grand Re , \vec{e} est divisé en 2 zones :

• ds la couche limite (près de la paroi) :
 n varie bcp sur δ , faible épaisseur \Rightarrow fortes contraintes visqueuses

• hors CL : $\vec{U} \approx$ uniforme, varie peu spatialement
 \Rightarrow faibles contraintes visqueuses
 \Rightarrow approx: hors CL, \vec{e} écoulement non visqueux

(c) Épaisseur de la CL en fonction de Re



\rightarrow dans la CL, la vitesse passe de \vec{U} à $\vec{0}$ sur δ

\Rightarrow transfert de \vec{p} \perp aux ldc
 \Rightarrow processus diffusif

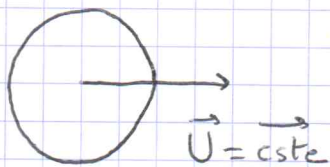
• Soit τ , tps carac de l'écoulement $\tau = \frac{L}{U}$

Q: $\delta(\tau)$? \rightarrow distance sur laquelle a lieu la diffusion pdt τ .

$$v [D] = m^2 \cdot s^{-1} \Rightarrow \delta \# \sqrt{v \tau} = \sqrt{v \frac{L^2}{U L}}$$

$$\Rightarrow \delta \# \frac{L}{\sqrt{Re}} \quad Re \uparrow \Rightarrow \delta \downarrow$$

2. Force de traînée subie par une sphère en movt rectiligne uniforme



fluide au repos \Rightarrow Réf. lié à la sphère (pour avoir un \vec{e} stationnaire)

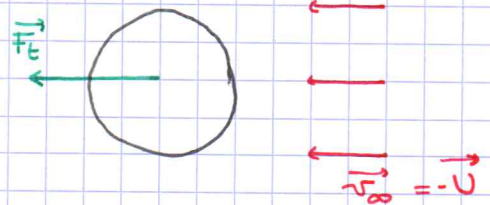
But: déterminer \vec{F}_t en fonction de Re ?

(a) Coefficient de traînée C_x

• "Maître-couple": surface A de l'objet projetée sur un plan L à l'écoulement

pr 1 sphère $A = \pi R^2$

$\vec{F}_t \propto A$ et $\frac{\|\vec{F}_t\|}{A} =$ pression à comparer à $\frac{\rho U^2}{2}$



Déf: $C_x = \text{coeff}^+$ sans dim. tel que:

$$\vec{F}_t = \frac{1}{2} \mu U^2 A C_x (-\vec{u}_x) \quad C_x(Re) = \frac{\|\vec{F}_t\|}{A \times \frac{1}{2} \mu U^2}$$

(b) Graphe $\log(C_x)$ en fonction de $\log(Re)$

(c) Traînée visqueuse pour $Re \ll 1$: loi de Stokes

pr $\begin{cases} Re=1, & C_x \approx 25 \\ Re=0,1, & C_x \approx 250 \end{cases}$

$$\log C_x = -\log Re + \text{de pente } -1 \text{ en log-log}$$

$$\Rightarrow C_x = \frac{k}{Re} = \frac{25}{Re}$$

Loi de Stokes

$$\|\vec{F}_t\| = \frac{1}{2} \mu U^2 \times \pi R^2 \times \frac{25 \eta}{\mu U 2R} \Rightarrow \|\vec{F}_t\| = \frac{25}{4} \pi \eta R U$$

$$\|\vec{F}_t\| \approx 6 \pi \eta R U$$

Loi de Stokes: $\vec{F}_t = -6 \pi \eta R \vec{U}$ force de frottement fluide

ex: sédimentation, mouvement de bactéries $R \sim 1 \mu m$
 $U \sim 1 \mu m/s$

$$\eta \sim 10^{-3} \text{ Pa.s} \quad \mu = 10^3 \text{ kg.m}^{-3} \quad Re = \frac{10^3 \times (10^{-6})^2}{10^{-3}} = 10^{-6} \ll 1$$

(d) Traînée convective quadratique pour $Re \in [1000, 200000]$

Pr $1000 < Re < 2 \cdot 10^5$, $C_x \approx \text{cte} \approx 0,45$ pr 1 sphère.

$C_x = c^2 \Rightarrow \|\vec{F}_t\| \propto U^2$

$$\vec{F}_t = -\frac{1}{2} C_x A \mu U^2 \vec{u}_x \quad \text{traînée convective}$$

OG: \rightarrow nageur: $Re = 10^6 \gg 1$

\rightarrow cycliste: $Re = \frac{2 \cdot 10}{10^{-5}} = 2 \cdot 10^6$

\rightarrow voiture: $Re = \frac{2 \times 30}{10^{-5}} = 6 \cdot 10^6$

dans la vie quotidienne, $Re \gg 1$
à notre échelle

(e) Re et rapport des traînées

$$\frac{\|\vec{F}_t \text{ conv}\|}{\|\vec{F}_t \text{ visq}\|} = \frac{\frac{1}{2} C_x \mu U^2 A}{6 \pi \eta R U} = \frac{C_x}{12} \cdot \frac{\mu R U}{\eta} \neq Re$$

$\rightarrow Re \ll 1$, traînée visqueuse

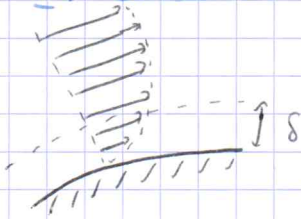
$\rightarrow Re \gg 1$, traînée convective

(f) Crise de traînée et recollement de la CL

Pr $Re \geq 2 \cdot 10^5$: C_x chute brutalement : dû au recollement de la CL
 \rightarrow diminution de la taille du sillage et donc de la traînée.

Q: pq ce recollement?

R: Calculons le Re dans la CL Re_s



$$Re_s \approx \frac{\mu \cdot U \cdot \delta}{\eta} \quad \text{or} \quad \delta \approx \frac{L}{\sqrt{Re_s}}$$

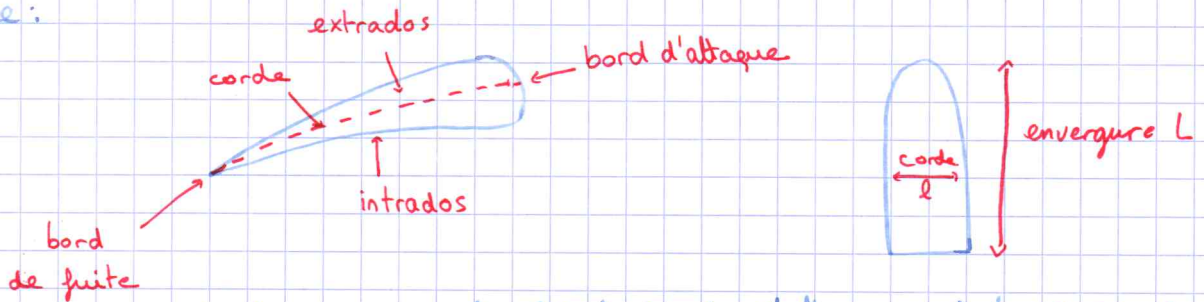
$$\Rightarrow Re_s \approx \frac{\mu U L}{\eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_s}} \approx \sqrt{Re_s}$$

Pour $Re \sim 2 \cdot 10^5$, la CL devient turbulente \rightarrow son épaisseur \downarrow et elle se recolle.

3 - Forces de traînée et de portance subies par une aile d'avion

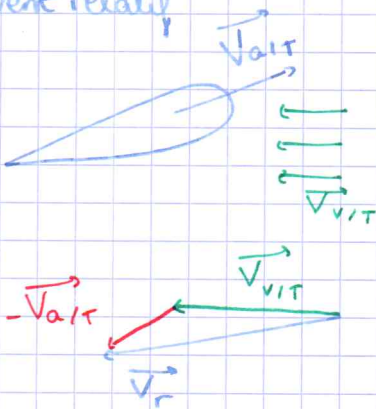
(a) Un peu de vocabulaire technique

● l'aile:

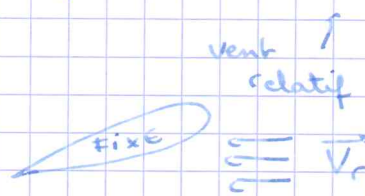


corde = segment reliant bord d'attaque et bord de fuite

● Vent relatif



\rightarrow dans le réf de l'avion $\vec{V}_r = \vec{V}_{VIT} - \vec{V}_{AIR}$

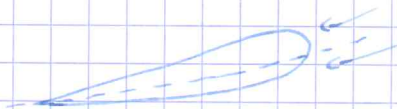
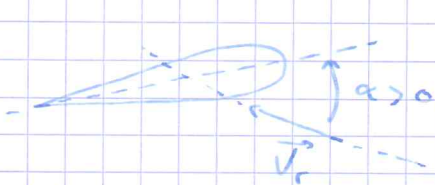


● Angle d'incidence = angle formé par la corde avec le vent relatif.

$\alpha > 0$

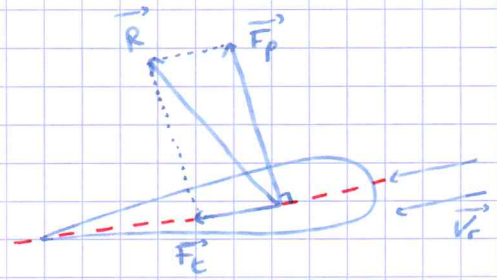
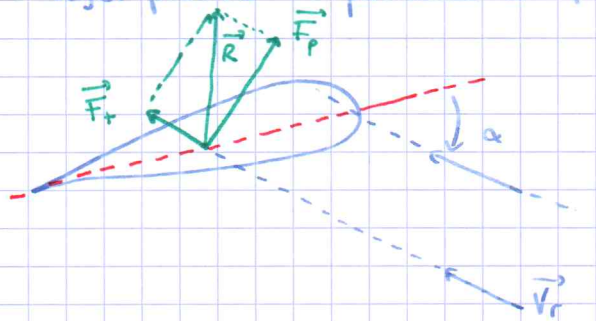
$\alpha = 0$

$\alpha < 0$



(b) Portance et traînée : déf

→ aile = objet profilé ⇒ portance \perp \vec{V}_r



$$\vec{R} = \underbrace{\vec{F}_D}_{\text{à minimiser}} + \underbrace{\vec{F}_L}_{\text{à maximiser}}$$

(c) Coefficients de traînée C_x et de portance C_z .

● Redéfinition du maître-couple → surface alaire $S = L \times l$

● Redéfinition de Re : distance caract = corde l

$$Re = \frac{\mu V_r l}{\eta}$$

$$\begin{aligned} \bullet Re &= \frac{4 \times 900}{3,6 \times 1,4 \cdot 10^{-5}} \\ &= 7 \cdot 10^7 \gg 1 \end{aligned}$$

● OG : Airbus A380

→ vitesse de croisière 828 km/h

$V_r \sim 900$ km/h

→ envergure avion 34,10 m

largeur fuselage 3,95 m

→ pr 1 aile $L \approx 15$ m

→ surface alaire : $S \approx 122$ m²

→ 61 m² / aile

→ $l \approx \frac{60}{15} = 4$ m

→ écoulement turbulent

$$\bullet \text{Déf: } C_x = \frac{\|\vec{F}_D\|}{\frac{1}{2} \rho V_r^2 \times S}$$

$$C_z = \frac{\|\vec{F}_L\|}{\frac{1}{2} \rho V_r^2 \times S}$$

Pr 1 profil donné (et 1 Re donné) :

$$\begin{cases} C_x(\alpha) \\ C_z(\alpha) \end{cases}$$

● Influence de α

→ $C_z(\alpha)$: • $\alpha = 0$: $C_z > 0$

• croissance lim. lorsque $\alpha \lesssim 15^\circ$ → chute brutale "décrochage"

→ $C_x(\alpha)$: $C_x \ll C_z$ ($\frac{C_x}{C_z} \sim$ de $\frac{1}{100}$ à $\frac{1}{20}$)

C_x min pr $\alpha \approx 3^\circ$ (inc. faibles)

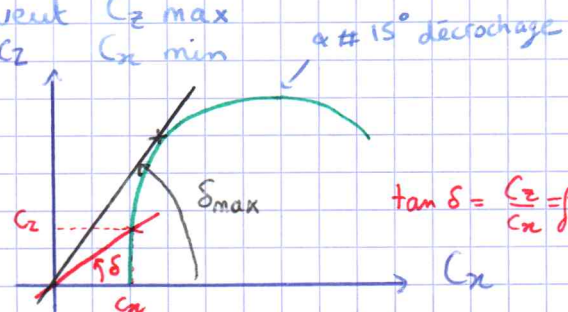
Croissance parabolique marquée vers $10-15^\circ$

(d) Quelques enseignements pratiques

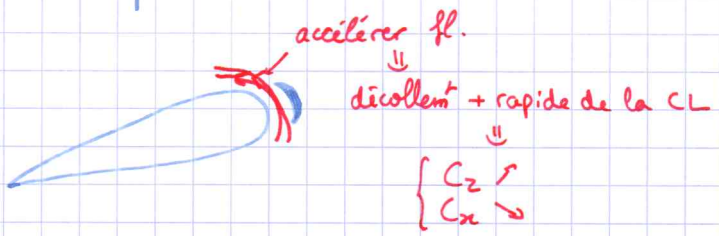
● maximiser $\|\vec{F}_L\|$ et minimiser $\|\vec{F}_D\|$: on veut C_z max C_x min

Def : finesse $f \hat{=} \frac{C_z}{C_x}$ à maximiser

→ courbe $C_z(C_x)$: polaire d'Eiffel



Volets de bord d'attaque



Volets de bord de fuite

