Lycée GUSTAVE EIFFEL Bordeaux Aquitaine

PSI*

Ondes 1D

1. Ondes non dispersives à 1D. Ondes stationnaires.

Exercice 1 : Vibrations d'une corde de piano sans raideur

On étudie la propagation d'une onde de petit déplacement transversal $\psi(x,t)$ le long d'une corde sans raideur de masse linéique ρ_0 et de tension à l'équilibre T_0. On se limite au cas d'une onde progressive sinusoïdale : $\psi(x,t) = A \exp i(kx - \omega t)$ où A est réel.

1) Soit $T_\perp(x,t)$ la force de tension transversale subie par un élément de corde de longueur dx situé à l'abscisse x de la part de la portion de corde située à sa gauche. Montrer que $T_\perp(x,t) = -T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}$. Montrer que l'on peut définir une « impédance » Z de la corde parcourue par l'onde progressive sinusoïdale par $Z = \frac{T_\perp(x,t)}{v(x,t)}$ où $(x,t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}$. En donner l'expression en fonction des caractéristiques de la corde vibrante et justifier physiquement cette définition de Z.

2) Calculer la puissance instantanée $\mathcal{P}(x,t)$ transportée par l'onde progressive en fonction de Z et $\Re\big(T_\perp(x,t)\big)$ d'une part, de Z et $\Re\big(v(x,t)\big)$ d'autre part. A quelle vitesse cette puissance est-elle transportée ?

3) Dresser un tableau complet des analogies entre la corde vibrante et le câble coaxial, y compris pour ce qui concerne l'aspect énergétique.

Exercice 2 : Attaque et dimensionnement du plan de cordes d'un piano

Lorsque l'instrumentiste frappe une touche du clavier, celle-ci actionne un mécanisme, qui actionne à son tour un marteau[1], qui vient frapper une corde[2]. Celle-ci entre alors en vibration libre (tant que la touche est enfoncée). On s'intéresse ici aux vibrations libres d'une corde du piano. On supposera ici que la corde peut être supposée sans raideur, et on négligera toujours les effets de la pesanteur.

La corde de masse linéique μ est tendue avec la tension T_0. Au repos, la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal[3] (Ox). On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note $\psi(x,t)$ le déplacement du point de la corde à l'abscisse x à l'instant t. L'axe (Oy) est l'axe vertical ascendant.

1. Que signifie l'expression « corde sans raideur » ? Qu'entend-on par « hypothèse des petits mouvements » ? Dans le cadre de l'approximation des petits mouvements, rappeler l'équation

---

[1] *Les marteaux sont réalisés en bois recouvert de feutre.*

[2] *La plupart des cordes sont en acier. Les cordes de grave, également en acier, sont recouvertes par un fil de cuivre enroulé sur le cœur d'acier. Dans le médium et l'aigu, chaque marteau frappe simultanément deux ou trois cordes identiques pour chaque note.*

[3] *Il s'agit donc ici d'un piano « horizontal », c'est-à-dire d'un piano à queue.*

aux dérivées partielles vérifiée par la fonction $\psi(x,t)$ (équation (1)). Identifier la célérité c des ondes transversales sur la corde, et en donner l'expression.

2. On peut lire dans une documentation technique la phrase suivante : « une corde de piano est tendue à 85 kg ». Pouvez-vous en déduire un ordre de grandeur de la tension T_0 d'une corde ? Pour une corde en acier donnant la note « La 4 », le diamètre de la corde est de 1,1 mm. La masse volumique de l'acier valant $7{,}8.10^3$ kg.m^{-3}, calculer la célérité c des ondes transversales sur la corde.

La corde est fixée à ses deux extrémités, $x = 0$ et $x = L$, ce qui impose les conditions aux limites : $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$.

3. Qu'appelle-t-on « modes propres » et « fréquences propres » de la corde ? Exprimer les fréquences propres f_n de la corde en fonction de c et L. Donner l'expression de la solution $\psi_n(x,t)$ correspondant au mode propre numéro n. Dessiner l'aspect de la corde à <u>plusieurs</u> instants bien choisis pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

La solution générale de l'équation (1) correspondant aux conditions aux limites $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$ est une superposition des modes propres, qui s'écrit :

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n\frac{\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(n\frac{\pi ct}{L}\right)\right) \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)$$

La corde est frappée à l'instant initial par un marteau de largeur $2a$ ($2a \ll L$), situé à l'abscisse x_0 (pendant un intervalle de temps supposé infiniment court). Ce marteau communique une vitesse initiale transversale à la corde. On se donne les conditions initiales suivantes (juste après l'attaque de la corde par le marteau) en tout point de la corde :

- la forme initiale de la corde donnée par $\psi(x,0) = 0$;
- la vitesse initiale de la corde donnée par $\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = \begin{cases} u_0 \text{ pour } |x - x_0| \leq a \\ 0 \text{ pour } |x - x_0| > a \end{cases}$.

4. <u>Sans aucun calcul</u>, exposer brièvement la procédure à suivre pour calculer les coefficients a_n et b_n.

On donne le résultat du calcul :

$$\psi(x,t) = \frac{4u_0 a x_0}{cL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi a}{L}\right)}{n\frac{\pi a}{L}} \frac{\sin\left(n\frac{\pi x_0}{L}\right)}{n\frac{\pi x_0}{L}} \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(n\frac{\pi ct}{L}\right)$$

5. Quel est l'effet de la largeur a du marteau ? Pour une corde de piano de longueur $L = 65$ cm (« Do 4 », fréquence fondamentale $f_1 = 262$ Hz), donner l'ordre de grandeur de la fréquence au-delà de laquelle cet effet est sensible. La largeur du marteau vaut $2a = 2$ cm. Commentaire ?
6. Comment choisir le point d'attaque si l'on veut supprimer l'harmonique de rang n ?

La hauteur du son produit par une corde est fixée par la fréquence f de son mode fondamental $n = 1$. Les 88 notes d'un piano moderne s'échelonnent du « La 0 » (fréquence fondamentale $f = 28$ Hz) au « Do 8 » (fréquence fondamentale $f = 4{,}2$ kHz).

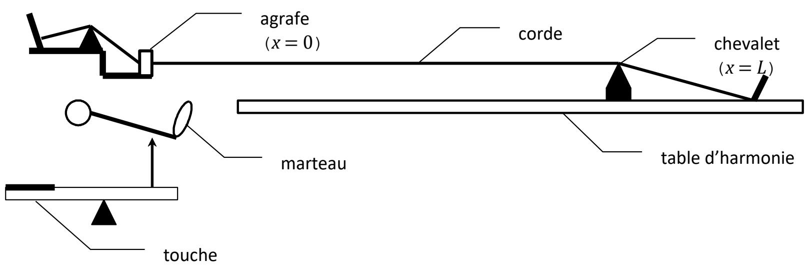
7. Rappeler la relation liant la longueur L d'une corde à la fréquence de son fondamental f. On rappelle que pour la fréquence fondamentale $f = 262$ Hz, on a une longueur de corde $L = 65$

cm. Tracer la courbe des variations de L en fonction de $\frac{1}{f}$. Quelles sont les valeurs extrêmes des longueurs de corde prévues dans l'extrême grave et dans l'extrême aigu ?

8. Les longueurs calculées ci-dessus sont excessives dans le grave (problèmes d'encombrement et de fragilisation de la structure à cette échelle) : en pratique, la longueur d'un piano à queue de concert moderne n'excède pas 3 m (la longueur la plus courante étant autour de 2,75 m). La longueur des cordes obéit assez bien à la loi étudiée précédemment pour les notes au-delà du « Do 4 ». Pour les notes plus graves, on utilise des cordes filées : il s'agit de cordes d'acier, autour desquelles on a enroulé un fil de cuivre. La longueur de corde variant peu dans ce domaine du clavier, expliquer l'intérêt de ce procédé. Pourrait-on envisager de jouer sur la tension T_0 des cordes ?
9. On donne la masse volumique du cuivre : $\rho_{\mathrm{Cu}} = 9{,}0.10^3$ kg.m^{-3}. En assimilant l'enroulement de cuivre à une couche homogène d'épaisseur 1 mm recouvrant le cœur d'acier de diamètre 1,6 mm, et pour la tension $T_0 = 850$ N, calculer la longueur de la corde du « La 0 » (note la plus grave du piano, de fréquence fondamentale f = 28 Hz).

Exercice 3 : Couplage cordes d'un piano – table d'harmonie via le chevalet

On poursuit l'étude menée à l'exercice précédent, en faisant toujours l'hypothèse de cordes sans raideur (les notations sont donc inchangées). Une corde vibrante est un « radiateur » acoustique très peu efficace. Si l'on veut produire du son efficacement, il faut utiliser une structure de bien plus grande taille : il s'agit de la table d'harmonie, mince planche d'épicéa, qui par ses vibrations, rayonne du son dans l'espace environnant. On s'intéresse ici à la manière dont la corde vibrante peut transférer une partie de son énergie à la table d'harmonie par l'intermédiaire d'une pièce de bois collée sur la table : le chevalet.



1. Dans le cadre de l'approximation des petits mouvements, établir les deux équations de couplage liant les dérivées partielles par rapport à t et x de la vitesse transversale d'un point de la corde $v_y(x,t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t)$ et de la projection $T_y(x,t)$ sur l'axe (Oy) de la force de tension exercée à l'abscisse x par le morceau de corde situé à droite de cette abscisse sur la partie située à gauche de l'abscisse x.
2. On considère une onde progressive sinusoïdale se propageant vers les x croissants le long de la corde. Montrer que pour cette onde progressive, le rapport $\frac{T_y(x,t)}{v_y(x,t)}$ est constant et prend une valeur : $\frac{T_y(x,t)}{v_y(x,t)} = -Z_c$ que l'on exprimera en fonction de μ et c. Z_c est appelée « impédance caractéristique » de la corde. Quelle est sa dimension ? Pourquoi parle-t-on d'impédance ? Que devient le rapport $\frac{T_y(x,t)}{v_y(x,t)}$ si l'onde progressive sinusoïdale se propage vers les x décroissants ?

La « partie utile » (ou longueur vibrante) de la corde est tendue entre l'extrémité gauche (en $x = 0$)

où l'agrafe la maintient immobile et l'extrémité droite (en $x = L$) où elle repose sur le chevalet. On propose de modéliser l'extrémité droite de la corde par la condition aux limites : $\frac{T_y(L,t)}{v_y(L,t)} = -R$, où R est une constante positive caractérisant le couplage corde – chevalet. Cette constante R se nomme l'impédance mécanique de l'ensemble chevalet – table d'harmonie.

3. Pourquoi ce modèle est-il pertinent selon vous ? De quel phénomène rend-il compte ? On se contentera d'une réponse qualitative.

On cherche des solutions complexes en ondes stationnaires de la forme : $\psi(x,t) = f(x)\exp(st)$ où s est un nombre **complexe**.

4. Montrer que $f(x) = A\sinh\left(\frac{sx}{c}\right)$ et que $\tanh\left(\frac{sL}{c}\right) = -\frac{1}{r}$, où l'on a posé : $r = \frac{R}{Z_c}$.

Ce dernier résultat peut se récrire ainsi : $\exp\left(\frac{2Ls}{c}\right) = \frac{r-1}{r+1}$, forme que l'on adopte dorénavant. s étant complexe, on pose : $s = \alpha + j\omega$, où α et ω sont des réels, et $j^2 = -1$.

Dans le cas où $r > 1$, qui correspond au cas du piano, calculer les valeurs possibles de ω ; commenter. Calculer également α en fonction de c, L et r ; commenter.

5. Montrer que la solution la plus générale tenant compte du couplage avec le chevalet est de la forme : $\psi(x,t) = \exp(\alpha t)\left(\exp\left(\frac{\alpha x}{c}\right).F\left(t+\frac{x}{c}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha x}{c}\right).F\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)$ où l'on explicitera la fonction F. Qu'en dîtes-vous ? Est-ce toujours une onde stationnaire ? Pourquoi ?
6. L'expérience quotidienne du pianiste montre qu'une note peut persister plusieurs secondes dans l'extrême grave, tandis que dans l'extrême aigu, le son ne persiste qu'une fraction de seconde. Les calculs menés ci-dessus sont-ils en accord avec l'expérience ? Quel(s) raffinement(s) pourrait-on apporter au modèle ?

Exercice 4 : Ondes de compression et de torsion dans une poutre

On considère une poutre cylindrique d'axe Ox, de section S, de masse volumique ρ.

Quand on tire sur les extrémités de la poutre, celle-ci s'allonge. Pour de faibles déformations, l'allongement est proportionnel à la force et on définit le module d'Young E par $\sigma = E\varepsilon$ où σ est la contrainte (force surfacique) normale et ε l'allongement relatif. Le déplacement longitudinal du point d'abscisse x à l'instant t est noté $u(x,t)$. On considère une tranche élémentaire de poutre d'épaisseur dx.

1. Exprimer ε en fonction de u.
2. En appliquant la loi de la quantité de mouvement, montrer que le déplacement longitudinal $u(x,t)$ suit une équation de D'Alembert. En déduire la vitesse de propagation c_P des ondes de compression dans cette poutre.

Cette poutre peut également se déformer en tournant localement autour de l'axe Ox. On admettra qu'une tranche de longueur infinitésimale d'épaisseur dx possède un moment d'inertie $dJ = j\,dx$ par rapport à Ox et que le couple exercé sur la tranche par la partie gauche de la poutre $\Gamma(x,t) = -\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x}(x,t)$ où $\alpha(x,t)$ est l'angle de torsion à l'abscisse x et γ est le coefficient de torsion linéique de la poutre.

3. Établir l'équation de propagation d'une onde de torsion le long de la poutre. En déduire la célérité c_S des ondes de torsion.

4. On frappe un coup sec sur une extrémité de la poutre, dans une direction quelconque, excitant à la fois la poutre en compression et en torsion. Quelles ondes arrivent en premier à l'autre extrémité de la poutre ?
   Données pour une poutre en acier :
   On donne : $j = \frac{\pi \rho R^4}{2}$ et $\gamma = \frac{\pi G R^4}{2}$, où G est le module de cisaillement.
   $\rho = 7,9.10^3$ kg.m^{-3} ; $E = 2,1.10^{11}$ Pa ; $G = 8,0.10^{10}$ Pa.

Exercice 5 : Amortissement des vibrations d'une corde par rayonnement

Une corde de guitare de longueur L rayonne de l'énergie sonore. On modélise la dissipation d'énergie due au rayonnement par une force de frottement par unité de longueur subie par la corde, que l'on suppose de la forme $-f\vec{v}$, où $\vec{v}$ désigne la vitesse transversale de la corde et f est un coefficient positif. La corde est caractérisée par une masse linéique μ et une tension T.

1) Déterminer l'équation de propagation vérifiée par l'élongation transversale $\psi(x,t)$.

2) On cherche les solutions stationnaires de cette équation : $\psi(x,t) = f(x) \cdot g(t)$. On suppose que les frottements sont assez faibles pour que la corde puisse osciller. Trouver les modes propres de vibration. Quel est l'effet des frottements sur les modes propres ?

Réponse : $\psi_n(x,t) = A\,exp\left(-\frac{ft}{2\mu}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 - \left(\frac{f}{2\mu}\right)^2}\,t + \varphi\right)$

Exercice 6 : Temps de relaxation d'une chaîne polymérique

Le physicien Rouse a proposé en 1953 un modèle simple rendant compte de la dynamique d'une chaîne de polymère idéale dans un solvant. A cet effet, on assimile la chaîne à un ensemble de $N+1$ ressorts sans masse de raideur κ reliant N « nœuds » de masse nulle repérés par leurs vecteurs positions $\vec{R}_n(t)$, n variant de 1 à N (on suppose le nombre N de maillons très grand). Chaque « nœud » est assimilé à une sphère subissant de la part du solvant une force frottement visqueux, caractérisée par un coefficient de frottement γ donné par la loi de Stokes : $\gamma = 6\pi\eta b$, où η désigne la viscosité du solvant et b le rayon des nœuds. On décrit le mouvement de chaque nœud par le vecteur $\vec{r}_n(t)$, défini par $\vec{R}_n(t) = \vec{R}_n^0 + \vec{r}_n(t)$, $\vec{R}_n^0$ désignant la position à l'équilibre du noeud n.

1) Montrer que l'équation du mouvement du nœud n s'écrit : $\frac{d\vec{r}_n}{dt} = \frac{\kappa}{\gamma}(\vec{r}_{n+1} + \vec{r}_{n-1} - 2\vec{r}_n)$.
2) On se limite à partir de maintenant à un modèle unidimensionnel dans lequel on suppose tous les maillons d'égale longueur a à l'équilibre : $\vec{R}_n^0 = na\vec{u}_x$. On se place également dans l'approximation continue, et on pose : $r(x,t) = r_n(t)$ à l'abscisse $x = na$.
Trouver l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction $r(x,t)$. Commenter et interpréter le coefficient $D = \frac{\kappa a^2}{\gamma}$ qui apparaît naturellement.
3) Montrer que la solution générale en « ondes stationnaires » s'écrit :
$r(x,t) = A\,exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\cos(kx+\varphi)$. Préciser la relation liant τ, D et k. Commenter.
4) Les conditions aux limites s'écrivent : $\frac{\partial r}{\partial x}(0,t) = 0$ et $\frac{\partial r}{\partial x}\big((N+1)a,t\big) = 0$. Expliquer pourquoi.
5) Exprimer les « modes propres » de la chaîne polymérique . On précisera les valeurs du vecteur d'onde k_p et du temps de relaxation τ_p dans le mode « p ». L'appellation « mode propre » vous semble-t-elle appropriée pour décrire la dynamique des chaînes ?

6) Expliquer pourquoi dans les premiers modes, on peut considérer la chaîne comme rigide. Dans un tel cas de « translation uniforme », montrer que le coefficient de frottement traduisant l'interaction de la chaîne et du solvant est donné par : $\gamma_{poly} = N\gamma$.

Exercice 7 : Modes propres d'un ressort

On considère un ressort horizontal de longueur à vide L, de raideur K, dont une extrémité est fixée en O, l'autre étant reliée à une masse m se déplaçant sans frottement le long de l'axe horizontal Ox. Soit μ la masse linéique du ressort. On repère le mouvement d'une spire située à l'abscisse x au repos, par sa position hors d'équilibre $x\ + \xi(x,t)$. Si on coupe fictivement le ressort à l'abscisse x, on admet que la force exercée par la partie droite sur la partie gauche est donnée par la loi de Hooke : $\vec{F} = KL\frac{\partial \xi}{\partial x}\vec{u}_x$.

1) Montrer que $\xi(x,t)$ vérifie l'équation de d'Alembert, et donner la célérité c correspondante.

2) On cherche les modes propres du ressort sous la forme $\xi(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$. Déterminer la fonction $f(x)$. Montrer que les pulsations propres vérifient l'équation : $\text{cotan}\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{m\omega}{\mu c}$. La résoudre graphiquement. Examiner les cas limites qui vous semblent intéressants.

3) On suppose que $\frac{\mu L}{m} \ll 1$, et que la pulsation propre ω_1 du mode fondamental est faible devant $\frac{c}{L}$.

En utilisant le DL en zéro $\tan\alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$, déterminer ω_1 à l'ordre un en $\frac{\mu L}{m}$. Commenter.

Exercice 8 : Guitare à amplification électromagnétique

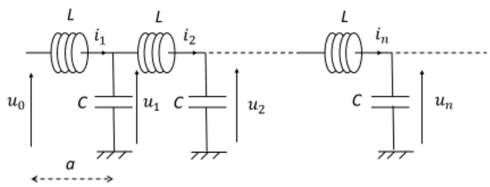
On étudie les petits mouvements transversaux d'une corde métallique de longueur L, de masse linéique μ, de tension F, fixée à ses deux extrémités d'abscisses $x\ =\ 0$ et $x\ =\ L$. On néglige la raideur de la corde, tout processus dissipatif ainsi que la pesanteur. La corde est parcourue par un courant $i(t) = I_0\cos(\omega t)$ et plongée dans un champ magnétique stationnaire $\vec{B} = B_0\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\vec{u}_y$.

1) Etablir l'équation aux dérivées partielles dont est solution le déplacement transversal $\psi(x,t)$.

2) Chercher la solution $\psi(x,t)$ en régime sinusoïdal forcé. Que constate-t-on lorsque la pulsation ω du courant $i(t)$ prend la valeur $\omega_0 = \frac{\pi c}{L}$? Interpréter.

Exercice 9 : Ligne LC discrète dans l'approximation continue

On considère une ligne LC supposée de taille infinie dans un premier temps, constituée d'inductances discrètes supposées idéales $L = 10$ µH et de capacités discrètes $C = 4$ nF. On applique une tension u_0 en entrée de la ligne et on étudie la propagation de l'onde de tension $u_n(t)$ et de courant $i_n(t)$ le long de la ligne.



1. Déterminer l'équation différentielle couplant les tensions $u_n(t)$, $u_{n+1}(t)$ et $u_{n-1}(t)$. On fera apparaître une pulsation ω_0 que l'on exprimera en fonction de *L* et *C*. Calculer la valeur numérique de la fréquence f_0 correspondante.

L'approximation continue consiste à ne considérer que des variations spatiales des tensions u_n ne se font que sur de « grandes » distances. On suppose ainsi que la distance caractéristique sur laquelle varie $u_n(t)$ est très supérieure à la taille a d'une cellule (ce point sera précisé plus loin). On peut alors introduire la fonction continue des deux variables continues x et t, définie par : $u(x = na, t) \overset{\text{def}}{=} u_n(t)$.

2. Dans le cadre de cette approximation, montrer que la fonction $u(x,t)$ est régie par une équation de d'Alembert. Exprimer la vitesse de propagation v des ondes de tension et de courant en fonction de ω_0 et a.

On applique une tension sinusoïdale $u_0(t) = U\cos(\omega t)$ à l'entrée de la ligne, et on se place en régime sinusoïdal forcé. On considère une solution en onde progressive harmonique de la forme $\begin{cases} u(x,t) = U\exp j(\omega t - kx) \\ i(x,t) = I\exp j(\omega t - kx) \end{cases}$ pour l'onde de tension et l'onde de courant se propageant le long de la ligne.

3. Montrer que les deux ondes de tension $u(x,t)$ et de courant $i(x,t)$ sont liées pas la relation : $\frac{u(x,t)}{i(x,t)} = Z$, où l'on exprimera la grandeur Z en fonction de *L* et C. Quelle est sa dimension ? Quelle est sa valeur numérique ? Commenter.
   Qu'en serait-il si l'on avait considéré deux ondes de tension et de courant progressives vers les *x* décroissants ?

La ligne est en réalité de taille finie et est constituée de 16 cellules LC. On s'intéresse ici à la propagation d'un train d'impulsions périodiques de tension le long de la ligne.

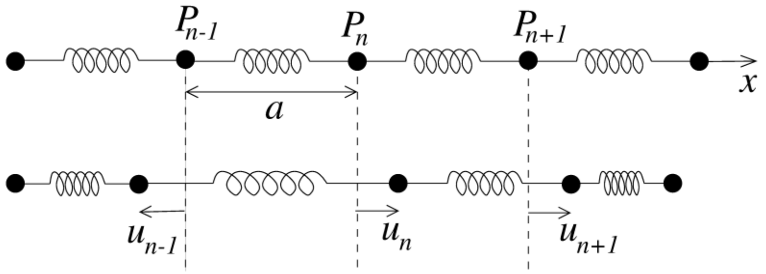
4. Par analyse dimensionnelle, donner un ordre de grandeur du temps de retard τ provoqué par la traversée d'une cellule *LC*. Quel ordre de grandeur prévoyez-vous a priori pour le temps de propagation du signal entre l'entrée et la sortie de la ligne ?
   En déduire une fréquence et une largeur convenables pour les impulsions qui ne doivent pas se recouvrir.
5. On applique à l'entrée de la ligne (signal u_0) un train d'impulsions adéquat et d'amplitude suffisante à l'aide du GBF (de résistance interne 50 Ω). On observe simultanément les signaux u_0 et u_{16} à l'oscilloscope dans les deux cas suivants :
   - Extrémité en circuit ouvert
   - Extrémité en court-circuit

Représenter l'allure des signaux u_0 et u_{16}.

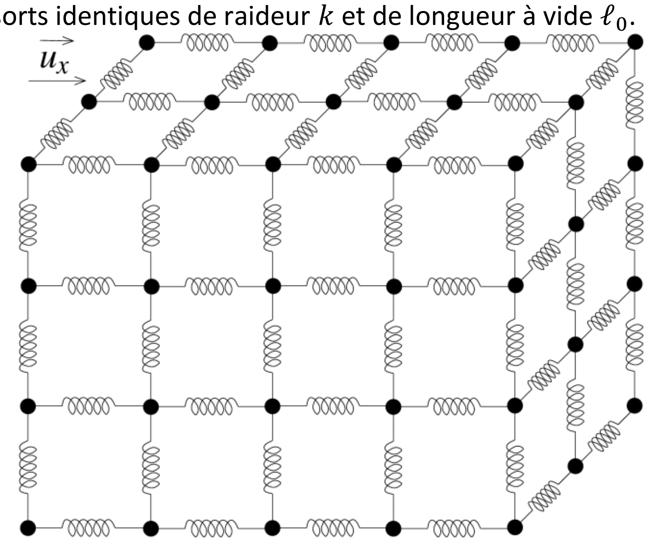
6. On branche maintenant une résistance variable *R* à l'extrémité de la ligne, et on en ajuste la valeur pour éliminer le signal réfléchi observé à l'entrée. Quelle est cette valeur ? Interpréter.

Exercice 10 : Vitesse du son dans un solide cristallin

On considère une chaîne rectiligne infinie d'atomes P_n identiques, de masse m, d'abscisses x_n, reliés par des ressorts identiques de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. À l'équilibre, les points sont régulièrement espacés : $x_n = na$. On note $u_n(t)$ le déplacement de l'atome P_n par rapport à sa position d'équilibre.



1. Établir l'équation de couplage liant les fonctions $u_n(t)$, $u_{n+1}(t)$ et $u_{n-1}(t)$.
2. ***Approximation continue :*** On considère le cas où la distance a entre deux atomes successifs est très petite devant l'échelle caractéristique de variation des $u_n(t)$ avec n. On peut alors modéliser les déplacements de l'ensemble des points par une fonction continue $u(x,t)$. En effectuant des développements limités de $u_{n+1}(t) = u(na + a, t)$ et de $u_{n-1}(t) = u(na - a, t)$, montrer que $u(x,t)$ vérifie une équation de D'Alembert. En déduire la vitesse c de propagation des ondes dans la chaîne, et le type d'onde qui s'y propage.
3. ***Ondes sonores dans un solide :*** On considère un solide dans lequel les atomes sont modélisés par des masses ponctuelles, disposées selon un réseau cubique de paramètre de maille a, reliées par des ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.



On définit le module d'Young E par $\sigma = E\varepsilon$ où σ est la contrainte normale (force surfacique normale définie par $= \frac{\overrightarrow{dF}.\vec{n}}{dS}$), et ε est l'allongement relatif. On considère une onde plane longitudinale se propageant selon la direction $\vec{u}_x$: le déplacement des atomes ne dépend que de x et est dirigé selon $\vec{u}_x$.

Calculer la vitesse de propagation de l'onde en fonction du module d'Young et de la masse volumique.

Données numériques pour l'acier : masse volumique μ = 7, 9.10^3 kg.m^{-3} ;
module d'Young E = 2, 1.10^{11} Pa.

2. Dispersion et atténuation d'ondes à 1D

Exercice 11 : Inharmonicité de raideur des cordes d'un piano

A cause de l'élasticité du métal constituant une corde de piano, il faut prendre en compte sa raideur. Cela est particulièrement vrai pour les cordes de grand diamètre[4].Il nous faut donc raffiner le modèle adopté jusqu'à présent pour décrire les petites vibrations transversales d'une corde de piano.

On considère toujours que les mouvements de la corde d'axe (Ox) sont transversaux selon l'axe (Oy) vertical, et contenus dans le plan vertical (xOy) : $\vec{\psi}(x,t) = \psi(x,t)\overrightarrow{u_y}$. La théorie de l'élasticité montre que la tension $\vec{T}(x,t)$ n'est plus tangente à la corde, et que pour permettre la courbure de la corde, il faut prendre en compte un couple de moment $\vec{\Gamma} = \pm\Gamma(x,t)\overrightarrow{u_z}$ dont l'expression est donnée par : $\Gamma(x,t) = \frac{\pi r^4}{4} E \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ où r désigne le rayon de la corde ; E, appelé « module d'Young », traduit les propriétés d'élasticité du matériau constituant la corde, et s'exprime en Pascal. On considère ici une corde en acier, et on donne sa masse volumique : ρ_{acier} = 7,8.10^3 kg.m^{-3} et E = 190 GPa.

On admet que les lois de la mécanique (loi de la quantité de mouvement et loi du moment cinétique) appliquées à une portion de corde conduisent à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - T_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + E\frac{\pi r^4}{4}\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} = 0$$

où μ désigne toujours la masse linéique de la corde et T_0 sa tension.

On s'intéresse à l'influence de la raideur sur les fréquences propres de la corde. On se place dans un mode propre de vibration et on suppose donc : $\psi(x,t) = A\cos(kx+\alpha)\cos(\omega t)$.

1. Etablir la relation de dispersion $\omega(k)$ d'un tel mode.
2. Montrer que les fréquences propres de la corde tendue entre ses extrémités fixées en $x = 0$ et $x = L$ s'écrivent : $f_n = n\frac{c}{2L}\sqrt{1+Bn^2}$, où n est un entier naturel non nul, c la célérité des ondes sur la corde sans raideur, et B une constante qu'on exprimera en fonction de E, T_0, r et L. Pouvez-vous en déduire un des avantages présentés par un piano à queue par rapport à un piano droit ?
3. Tracer sur un même graphique les courbes représentatives de f_n en fonction de n pour une corde sans raideur et pour la même corde avec raideur. Commenter.
4. Calculer numériquement B (on prendra L = 0,65 m, r = 0,55 mm, T_0 = 850 N et E = 190 GPa). En déduire l'expression de l'inharmonicité de raideur i_n définie par le rapport $i_n = \frac{f_n - f_n^0}{f_n^0}$, où f_n^0 désigne la fréquence propre du mode n pour une corde sans raideur.

[4] *C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on « enrobe » les cordes de grave avec du cuivre enroulé, plutôt que d'augmenter encore le diamètre du cœur d'acier.*

5. A partir de quel rang n la fréquence propre f_n de la corde avec raideur est-elle plus élevée d'un demi-ton que celle de la corde idéale, f_n^0 ?
Donnée : deux notes séparées d'un demi-ton ont des fréquences fondamentales qui sont dans un rapport $2^{1/12}$.

Exercice 12 : Modes propres de vibration de la table d'harmonie d'un piano

La table d'harmonie d'un piano est mise en mouvement de flexion par le couplage avec le chevalet lui-même entraîné par les cordes : elle est alors le siège d'oscillations transversales de petite amplitude $w(x,z,t)$, le plan (xOz) désignant le plan horizontal avec lequel coïncide la table d'harmonie lorsqu'elle est au repos. La théorie de l'élasticité permet l'étude détaillée de ces mouvements de flexion, et on admettra que le déplacement transversal $w(x,z,t)$ est régi par l'équation aux dérivées partielles : $\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} + D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} = 0$, où ρ désigne la masse volumique de la table, h son épaisseur, et les coefficients D_1, D_2 et D_3 sont trois coefficients caractérisant la rigidité de la table d'harmonie.

On admet que les modes propres de vibration de la table d'harmonie sont de la forme :

$$w(x,z,t) = A\cos(k_x x + \alpha)\cos(k_z z + \beta)\cos(\omega t + \phi)$$

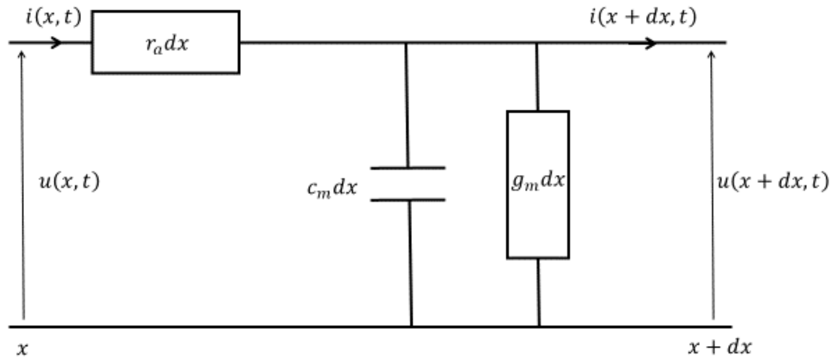
On suppose aussi que la table d'harmonie est rectangulaire (cas d'un piano droit par exemple) et est fixée sur ses bords en $x = 0$, $x = a$, $z = 0$ et $z = b$.

1. Montrer que les modes propres sont indexés par deux entiers naturels m et n non nuls, et que $w_{mn}(x,z,t) = A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{b}\right)\cos(\omega_{mn}t + \phi_{mn})$ où ω_{mn} désigne la pulsation propre du mode (m,n) que l'on déterminera plus loin.
2. On appelle lignes nodales les lieux de la table d'harmonie d'amplitude nulle (il s'agit des nœuds de vibration). Représenter sur six schémas distincts ces lignes nodales pour les modes suivants : (1,1), (2,1), (1,2), (2,2), (3,2) et (2,3). On précisera soigneusement les axes (Ox) et (Oz), et on supposera $a > b$.
3. Quelle est la dimension des coefficients de rigidité D_1, D_2 et D_3 ?
4. Montrer que la relation de dispersion des modes propres s'écrit :
$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{\sqrt{\rho h}}\sqrt{D_1\left(\frac{m}{a}\right)^4 + D_3\left(\frac{n}{b}\right)^4 + 2D_2\left(\frac{mn}{ab}\right)^2}$$
5. Dans le cas isotrope, la table a le même comportement élastique selon les direction (Ox) et (Oz), et on a alors les relations : $D_1 = D_2 = D_3 = D$. Que devient la relation de dispersion ? Sur quelle courbe représentative du plan (ω,k) sont situés les points (ω_{mn},k_{mn}) ? On note $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ et on représente ω en ordonnée et k en abscisse.

6. On revient au cas général non isotrope (dit « orthotrope »)[5]. On suppose que la table d'harmonie est plus rigide selon l'axe (Ox) que selon l'axe (Oz), ce qui se traduit par la condition : $D_1 > D_2 > D_3$. Montrer que le lieu géométrique des points (ω_{mn}, k_{mn}) est situé entre deux paraboles dont on précisera les équations $\omega(k)$. Faire un schéma illustratif.

Exercice 13 : Propagation de l'influx nerveux le long d'un axone

On étudie la propagation de l'influx nerveux le long d'un axone constitué d'une partie interne cylindrique appelée axoplasme (de résistance linéique $r_a = 6{,}4$ GΩ.m^{-1}) recouverte d'une membrane de myéline (de capacité linéique $c_m = 320$ nF.m^{-1} et de conductance linéique $g_m = 300$ µS.m^{-1}). Pour cela, on modélise l'axone par une ligne électrique continue et on adopte une décomposition en cellules élémentaires de longueur dx décrite sur la figure ci-dessous :



1. Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la tension $u(x,t)$.

On envisage une solution de cette équation sous forme d'une OPPH* de pulsation ω et de vecteur d'onde complexe k.

2. Pourquoi est-il possible de rechercher des solutions de ce type ?
3. A quelle condition et pour quelles fréquences l'équation aux dérivées partielles régissant $u(x,t)$ se simplifie-t-elle en : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r_a c_m \frac{\partial u}{\partial t}$? Quel est le phénomène régi par cette équation ?
4. On suppose que la condition précédente est réalisée. Déterminer la relation de dispersion. Le milieu est-il dispersif ? atténuant ? Mettre en évidence une distance d'atténuation du signal.
5. Déterminer les vitesses de phase et de groupe. Quelle relation lie ces deux grandeurs ?

[5] *On comprend en effet aisément que l'épicéa dont est faite la table d'harmonie est beaucoup plus rigide dans le sens des fibres du bois que perpendiculairement aux fibres.*

Exercice 14 : Vibrations transversales d'une corde verticale

Une corde vibrante verticale de masse linéique μ et de longueur $\ell = 10$ m est suspendue par une de ses extrémités *A*, l'autre extrémité *B* étant libre. Au repos, *A* est fixe et la corde est verticale. Lorsqu'on impose à l'extrémité *A* un déplacement horizontal $x_A(t) = X\cos\omega t$, on constate que la corde se déforme avec un déplacement $x(z,t)$ de pulsation ω dont l'amplitude augmente quand on s'éloigne de *A*. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme.

1. Établir l'expression de la tension $T(z)$ en tout point de la corde et montrer que :
$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g\frac{\partial x}{\partial z} + g(\ell - z)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}.$$
2. On se place "au début" de la corde : $z \ll \ell$. Établir la relation de dispersion et interpréter l'observation.

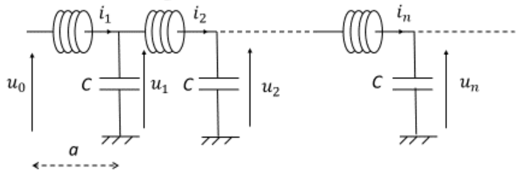
Exercice 15 : Phonons dans un cristal

On considère une chaîne infinie linéaire d'atomes ponctuels de masse m liés par des ressorts de raideur K. La chaîne est portée par l'axe OX ; à l'équilibre, les atomes occupent les positions $X_n = na$ avec $n \in \mathbb{Z}$ où a est la longueur à vide des ressorts.

1. Établir l'équation différentielle régissant l'écart algébrique $x_n(t)$ de l'atome n par rapport à sa position d'équilibre.
2. On cherche des solutions sous la forme $x_n = A\exp i(\omega t - kna)$. Déterminer la relation de dispersion.
3. Montrer que la chaîne se comporte comme un filtre passe-bas dont on calculera la pulsation de coupure ω_c. Tracer le graphe $\omega(k)$. Y a-t-il dispersion ? Calculer $x_n(t)$ lorsque $\omega = \omega_c$. Commenter.
4. Calculer $x_n(t)$ lorsque $\omega \ll \omega_c$. Commenter. Déterminer alors la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'onde. Montrer que l'on peut déterminer dans ce cas une équation d'onde et retrouver les résultats précédents.

Exercice 16 : Puissance électrique transmise le long d'une ligne LC infinie (oral X-ENS PSI)

On considère une ligne infinie de cellules *LC* alimentée par une source de tension sinusoïdale idéale $u_0(t) = U\cos\omega t$. Déterminer, en fonction de la fréquence la puissance moyenne délivrée par la source de tension.



Indication : on pourra raisonner par analogie avec les phonons dans un cristal unidimensionnel…

Réponse : $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{U^2}{2Z}\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^2}$ où $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

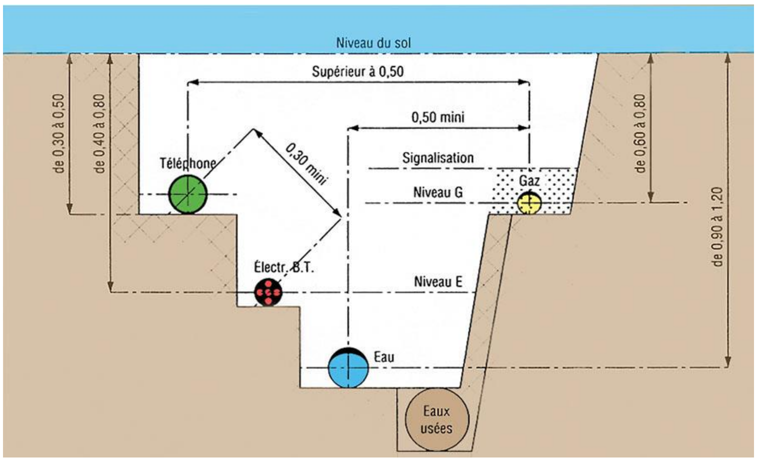
Exercice 17 : Des caves de Château Petrus aux 24 heures du Mans

On étudie dans cet exercice les fluctuations de température saisonnières et quotidiennes dans le sol, modélisé par le demi-espace $x \geq 0$. Il s'agit donc de déterminer le champ de température $T(x \geq 0, t)$ dans le sol. On modélise les fluctuations périodiques de température de l'atmosphère (fluctuations dues à l'alternance des saisons à l'alternance jour-nuit) par un forçage sinusoïdal de la condition aux limites en $x = 0$: $T(0,t) = T_0 + \theta\cos(\omega t)$.

1) Déterminer par la méthode de votre choix le champ de température $T(x \geq 0, t)$ en régime sinusoïdal forcé. On fera apparaître une distance δ caractérisant l'atténuation de la fluctuation de température, que l'on exprimera en fonction de ω et du coefficient de diffusion thermique D du sol.
   Commenter la forme de $T(x \geq 0, t)$ en lien avec un autre phénomène régi par le même type de loi.
2) A quelle profondeur une cave doit-elle être aménagée si l'on veut que la fluctuation de température de la cave n'excède pas 1°C au cours de l'année ?
   Donnée : diffusivité thermique du sol $D = 10^{-6}$ m^2.s^{-1}.
   Avec quel retard la fluctuation de température y est-elle ressentie ? Commenter.
3) A quelle profondeur faut-il enterrer une canalisation pour qu'elle ne gèle pas ?
4) Dans un moteur à explosion à 4 temps, la compression et la détente subies par le mélange air-essence dans un cylindre sont en général supposées adiabatiques.
   A quelle condition sur les parois du cylindre cette hypothèse est-elle valide pour un régime moteur de 6000 tours par minute ?
   Donnée : diffusivité thermique du métal constituant le cylindre $D = 10^{-6}$ m^2.s^{-1}.

Exercice 18 : Normes d'enfouissement des conduites d'adduction d'eau

Le document ci-dessous précise les normes en vigueur pour l'enfouissement des conduites et canalisation de différents réseaux de distribution.



Justifier le plus quantitativement possible la profondeur choisie pour le réseau d'eau. On introduira toutes les grandeurs physiques que l'on jugera nécessaires.

Aide : la diffusivité thermique des sols D (en m^2.s^{-1}) varie suivant le type de sol :

$$0{,}2\,.\,10^{-6} \leq D \leq 1{,}0\,.\,10^{-6}.$$