Lycée GUSTAVE EIFFEL Bordeaux Aquitaine

PSI*

Ondes acoustiques

1. Ondes sonores sans dispersion

Exercice 1 : Sphère pulsante et impédance de rayonnement d'un tuyau sonore

Une sphère de centre fixe O dont le rayon $a(t) = a_0 + a_1\cos(\omega t)$ varie sinusoïdalement avec une amplitude $a_1 \ll a_0 \ll \lambda$, émet des ondes sonores dans tout l'espace extérieur à la sphère, rempli d'air de masse volumique ρ_0 où la célérité des ondes sonores vaut c. Compte tenu de la symétrie sphérique du problème, on cherche pour les ondes de pression et de vitesse des solutions de la forme (en coordonnées sphériques) : $P_1(r,t)$ et $v_1(r,t)\overrightarrow{u_r}$.

Le laplacien d'un champ scalaire $f(r,t)$ s'écrit : $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf)$.

1. Déterminer la forme générale des solutions $P_1(r,t)$ de l'équation de d'Alembert et interpréter. Dans toute la suite, on ne conserve que la solution $P_1(r,t) = \frac{f\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}$: justifier ce choix.
2. Dans toute la suite, on cherche une solution sinusoïdale de la forme $P_1(r,t) = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr - \alpha)$. Que vaut k ? Déterminer le champ des vitesses correspondant en tout point. Que devient-il « dans la zone de rayonnement » i.e. pour $r \gg \lambda$? Quelle est alors localement la structure de l'onde ? Que vaut le rapport $\frac{P_1(r,t)}{v_1(r,t)}$ dans ce domaine ?
3. Déterminer A et α en fonction des données du problème en examinant le champ des vitesses au voisinage de la sphère (zone de « champ proche »).
4. Calculer la puissance moyenne rayonnée dans tout l'espace par la sphère.

On modélise l'extrémité ouverte d'un tuyau cylindrique de rayon a_0 (de flûte, par exemple) par la sphère pulsante précédente, et on cherche à interpréter la condition aux limites usuelle que l'on écrit à la sortie d'un tel tuyau : « nœud de pression, ventre de vitesse ».

5. Exprimer le rapport complexe $\frac{\underline{P_1}(r,t)}{\underline{v_1}(r,t)}$ dans le cas de la sphère pulsante à une distance r quelconque, en fonction de ρ_0, c, ω et r.
6. En déduire que « l'impédance de rayonnement » du tuyau sonore, définie en $r = a_0$, vaut sensiblement : $\underline{Z_{ray}} \approx \rho_0 c\left(\left(\frac{\omega a_0}{c}\right)^2 + j\,\frac{\omega a_0}{c}\right)$. On justifiera quantitativement l'approximation faite.
7. Interpréter la condition aux limites usuelle que l'on écrit à la sortie d'un tel tuyau : « nœud de pression, ventre de vitesse ».

Exercice 2 : Temps de réverbération d'une salle

On cherche à évaluer le temps de réverbération d'une salle, c'est-à-dire l'ordre de grandeur du temps que met un son à s'éteindre du fait de l'absorption par les parois et par les personnes présentes dans la salle. Nous allons envisager ici deux modèles simples : celui de Sabine, puis celui de Norris-Eyring. On note V le volume de la salle et S_i l'aire des différentes parois qui la délimitent. α_i est le coefficient d'absorption (compris entre 0 et 1) de la paroi « i », c'est-à-dire la fraction de la puissance reçue par la paroi qui est absorbée.

On considère dans un premier temps une onde sonore plane progressive (a priori non harmonique) arrivant sous incidence normale sur une des parois de surface S_i, de coefficient d'absorption α_i.

1. Exprimer la puissance moyenne absorbée $\overline{\mathcal{P}_{a,i}}$ par la paroi en fonction de α_i, c, S_i et $\overline{w}$, densité volumique moyenne d'énergie de l'onde sonore.

En réalité, la paroi d'une salle reçoit une multitude d'ondes planes progressives se propageant de manière isotrope dans toutes les directions. On admet que de ce fait, le résultat précédent doit être divisé par 4.

Dans la salle étudiée, on suppose qu'à $t = 0$ règne un champ sonore de densité d'énergie moyenne uniforme $\overline{w_0}$. On suppose que la densité d'énergie $\overline{w}(t)$ est uniforme et on recherche sa dépendance temporelle.

2. En effectuant un bilan d'énergie sur le champ sonore contenu dans la salle, établir l'équation différentielle régissant $\overline{w}(t)$. Exprimer le temps τ caractéristique de la décroissance de $\overline{w}(t)$ en fonction de V, c et des couples (α_i, S_i).
3. Montrer que le temps de réverbération à 60 dB (correspondant à une diminution de l'énergie sonore de 60 dB) est donné par la formule de Sabine : $T_{S,60dB} = \frac{0,16V}{\sum \alpha_i S_i}$.
4. Calculer numériquement ce temps de réverbération pour une salle rectangulaire vide de dimensions 20 m × 10 m × 4 m dont toutes les parois ont le même coefficient d'absorption $\alpha = 0,25$. Que devient ce temps si la salle contient 200 personnes ? On admet que la contribution de chaque personne équivaut à une surface supplémentaire de 1 m^2 (cette valeur inclut le coefficient d'absorption).

La formule de Sabine donne de bons résultats tant que les parois ne sont pas trop absorbantes : en effet, si $\alpha \to 1$, le temps de réverbération temps vers une limite finie alors que 100 % de l'énergie sonore est absorbée par les parois. On souhaite donc affiner le modèle de manière à obtenir un temps de réverbération tendant vers 0 dans le cas où $\alpha \to 1$. C'est l'objet du modèle de Norris-Eyring qui suit. On continue à considérer que la densité d'énergie sonore $\overline{w}(t)$ est uniforme dans la salle mais on va supposer que celle-ci ne varie plus de manière continue au cours du temps, mais de manière discrète. On suppose que toutes les parois sont caractérisées par le même coefficient d'absorption α.

5. Soit $\overline{N}$, le nombre moyen de réflexions que subit une onde sonore sur les différentes parois, par unité de temps. Combien de réflexions subit, en moyenne, l'onde pendant l'intervalle de temps $\Delta t = \frac{1}{\overline{N}}$? Quelle est la relation liant Δt, l'énergie sonore E contenue dans la salle à un instant donné et la puissance moyenne incidente $\overline{\mathcal{P}_{inc}}$ sur l'ensemble des parois ?
6. Si l'énergie sonore contenue initialement dans la salle vaut $E(0) = V\overline{w_0}$, justifier qu'à $t = \Delta t$, $E(\Delta t) = V\overline{w_0}(1 - \alpha)$. Donner les expressions de $E(2\Delta t)$ puis $E(n\Delta t)$ par un raisonnement analogue.

7. En assimilant $E(t = n\Delta t)$ à une loi exponentielle $\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, déterminer la nouvelle constante de temps τ en fonction de V, c, S et α.
8. Montrer que le temps de réverbération à 60 dB dans le modèle de Norris-Eyring s'écrit : $T_{NE,60dB} = -\frac{0{,}16V}{S\ln(1-\alpha)}$ (on pourra s'aider du résultat de la question affecté du coefficient $\frac{1}{4}$). Commenter le résultat. En quoi le modèle est-il plus pertinent pour les parois très absorbantes ? Calculer le temps de réverbération de la salle précédente vide et comparer au résultat donné par la formule de Sabine.

Exercice 3 : Onde progressive non harmonique. Amortissement par rayonnement

On considère un tuyau sonore de section constante S et d'axe Ox s'étendant entre les abscisses $x = 0$ et $x = +\infty$. Ce tuyau est rempli d'air de masse volumique μ_0 où la célérité du son vaut c. Il est fermé par un piston de masse m mobile sans frottement : à l'instant $t = 0$, on lance le piston avec une vitesse u_0 et on constate qu'il s'arrête après avoir parcouru une distance finie qu'on supposera faible devant toute distance caractéristique du problème, de sorte que l'abscisse du piston reste approximativement nulle. À un instant quelconque, on note $u(t)$ la vitesse du piston. À droite, le mouvement du piston engendre une onde sonore décrite par la surpression $p_1(x,t)$ et le champ de vitesse $v_1(x,t)$. Pour simplifier, on néglige l'onde émise vers la gauche, c'est-à-dire qu'on suppose que la pression y reste uniforme, égale à P_0.

1. Écrire les conditions aux limites sur le piston, et en exploitant la notion d'impédance d'une onde plane progressive, en déduire $u(t)$. Définir un temps caractéristique τ et commenter ses variations avec m et S.
2. En déduire l'expression de $v_1(x,t)$ et la représenter graphiquement à un instant $t > 0$ donné.
3. Établir l'expression de l'énergie de l'onde sonore à l'instant t et interpréter le résultat.

Exercice 4 : Ondes de gravité en eau peu profonde

On considère un bassin de largeur L selon Oy, de profondeur moyenne H selon Oz et de longueur infinie selon Ox rempli d'eau. Le bassin est le siège de vagues (ondes de gravité) caractérisées par un champ de vitesse $\vec{v} = v(x,t)\vec{u}_x$ et un champ de pression $p(x,z,t)$. A l'instant t et à l'abscisse x, la hauteur d'eau est notée $h(x,t) = H + \zeta(x,t)$, où$|\zeta(x,t)| \ll H$.

1. On admet la relation : $\mu\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \approx -\vec{\nabla}p + \mu\vec{g}$. Interpréter et commenter cette relation.
2. En déduire les relations (PZ) liant $p(x,z,t)$ et $\zeta(x,t)$, et (PV) liant $p(x,z,t)$ et $v(x,t)$.
3. En déduire l'équation de couplage (1) liant $\frac{\partial v}{\partial t}$ et $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$.

On considère une tranche d'eau située entre les abscisses x et $x + dx$, en régime non permanent.

4. Dessiner la tranche d'eau aux deux instants t et $t + dt$. En effectuant un bilan de masse sur cette tranche en régime *non* stationnaire, obtenir la relation (2) couplant $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$.
5. En déduire que la surélévation $\zeta(x,t)$ est régie par une équation de d'Alembert, et préciser l'expression de la vitesse de propagation des vagues.
6. Expliquer pourquoi les vagues ralentissent en s'approchant du rivage, et y arrivent en lui étant parallèles.
7. Expliquer pourquoi une grosse vague se propageant dans un bassin de profondeur constante se déforme et déferle.

Exercice 5 : Onde sonore discrète dans un tuyau crénelé

Un tuyau crénelé (gaine de protection de câbles électriques par exemple) est modélisé par une succession infinie d'alvéoles quasi-sphériques de rayon R séparées par des tubes cylindriques de rayon r et de longueur ℓ. On s'intéresse à la propagation d'une onde acoustique dans un tel tuyau crénelé à l'aide d'un modèle *discret*. Pour cela, on introduit p_n, surpression acoustique dans la n – ième sphère et $\vec{v}_n = v_n \vec{u}_x$, la vitesse de l'air dans le tuyau cylindrique reliant la n – ième et la $n+1$ – ième sphères.

1. Faire un dessin !
2. Etablir une relation liant $p_n - p_{n+1}$ et v_n.
3. Etablir une relation liant $v_{n-1} - v_n$ et p_n.
4. En déduire l'équation différentielle couplant p_n, p_{n-1} et p_{n+1}.
5. Dans l'approximation continue, exprimer la vitesse de l'onde acoustique se propageant dans le tube en fonction de c_{air}, vitesse du son dans l'air, et de R, ℓ et r.

Exercice 6 : Vitesse de propagation du pouls dans une artère

On considère une onde de pouls se propageant dans une artère d'axe Ox et de section $S(x,t)$ qui varie *légèrement* sous l'effet de la pression artérielle. On suppose l'écoulement du sang parfait et incompressible. L'artère est caractérisée par sa « distensibilité » D définie par la relation : $D = \frac{1}{S_0}\frac{\partial S}{\partial p}$ où S_0 est la section moyenne de l'artère. L'onde de pouls est décrite par la section variable $S(x,t)$ de l'artère, par le champ de pression $P(x,t) = P_0 + p(x,t)$ où $p(x,t)$ est la surpression algébrique provoquée par le passage de l'onde de pouls, et par le champ de vitesse $\vec{v} = v(x,t)\vec{u}_x$.

1. La tension artérielle « normale » vaut typiquement 13/8, ce qui signifie l'artère se ferme quand elle est comprimée à 13 cm Hg et se rouvre quand elle n'est comprimée qu'à 8 cm Hg. Evaluer numériquement la distensibilité D. *Donnée :* 75 cm Hg = 1 bar.
2. On considère une tranche d'artère comprise entre les abscisses x et $x + dx$. En effectuant un bilan de masse sur cette tranche, et en se plaçant dans l'approximation linéaire, montrer que : $D\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$.
3. Quelle est l'équation linéarisée qui relie $\frac{\partial v}{\partial t}$ et $\frac{\partial p}{\partial x}$?
4. En déduire que l'onde de pouls est régie par une équation de d'Alembert, et donner sa vitesse de propagation.
5. Expérimentalement, on constate que le décalage temporel entre les battements du cœur mesurés lors d'un électrocardiogramme et le pouls pris au poignet est d'environ ¼ de seconde. Qu'en dîtes-vous ? Ce retard est-il imputable à la propagation du son dans le sang ?

2. Dispersion et atténuation d'ondes sonores

Exercice 7 : Rayonnement sonore par la table d'harmonie d'un piano

La table d'harmonie d'un piano est une mince planche réalisée en bois d'épicéa, dont le rôle est de rayonner du son dans l'espace environnant lorsqu'elle est mise en vibration sous l'effet des vibrations des cordes.

La table d'harmonie est assimilée à une plaque plane mince et flexible, unidimensionnelle et de longueur infinie dans un premier temps, subissant des déformations de flexion sinusoïdales (vibrations transversales) modélisées par le déplacement transversal (petit) :

$$\vec{w}(x,t) = A_0 \exp j\left(\omega t - k_p x\right)\vec{u}_y$$

On cherche l'onde sonore rayonnée par la table sous la forme d'une OPPH en $\exp j\left(\omega t - k_x x - k_y y\right)$. L'axe (Oy) est perpendiculaire à la table. On suppose que l'onde sonore n'est rayonnée que dans le demi-espace supérieur $y \geq 0$.

1) Quelle condition aux limites vérifie le champ de vitesse de l'onde sonore ? Déterminer sa composante $v_y(x,y,t)$, normale à la table, puis le champ de pression $p(x,y,t)$. Montrer en particulier que $k_x = k_p$.
2) Déterminer la relation de dispersion des ondes sonores $k_y^2(\omega)$. Discuter la nature des solutions en fonction de ω. Dans quel cas peut-on parler d'une direction de propagation ? La préciser.
3) Calculer, selon les valeurs de ω, la puissance moyenne rayonnée par la table d'harmonie à travers une surface plane S qui lui est parallèle. On supposera que le rayonnement n'a lieu que du côté situé au-dessus de la table d'harmonie.
4) On cherche à préciser les domaines de fréquences correspondant aux régimes mentionnés ci-dessus. Pour cela, on donne la relation de dispersion des ondes de

flexion dont la table d'harmonie est le siège : $k_p(\omega) = \alpha\sqrt{\omega}$ où $\alpha = 3.10^{-2}$ unités S.I.. On donne la célérité des ondes sonores dans l'air : $c = 340$ m.s^{-1}.
Quelle est la dimension du coefficient α ? Mettre en évidence graphiquement l'existence d'une pulsation critique et la calculer numériquement. Interpréter en lien avec les résultats mis en évidence à la question 2. Les différentes fréquences du spectre audible sont-elles effectivement rayonnées par la table d'harmonie ?

5) En réalité, une table d'harmonie est de longueur L_x et de largeur L_z finies. On la suppose rectangulaire (c'est le cas d'un piano droit). Comment peut-on transposer les résultats précédents, pour déterminer le champ rayonné par la table lorsqu'elle vibre dans un de ses modes propres de vibration décrit par :
$\vec{w}_{nm} = A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{L_z}\right) \exp(j\omega_{mn}t)\,\vec{u}_y$? Aucun calcul n'est ici demandé.

Exercice 8 : Amortissement du son par viscosité

On étudie ici l'influence de la viscosité sur la propagation du son dans un fluide. On envisage la propagation à une dimension d'une onde sonore (onde plane), selon l'axe (Ox). Le champ des vitesses associé à la propagation du son s'écrit donc : $\overrightarrow{v_1}(x,t) = v_1(x,t)\overrightarrow{u_x}$. On admet qu'**en première approximation**, les forces de viscosité subies par une particule de fluide de volume $\delta\mathcal{V}$ s'écrivent : $\overrightarrow{dF}_{visc} = \eta \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \delta\mathcal{V}\overrightarrow{u_x}$, où η est la viscosité dynamique du fluide. Les autres hypothèses de la théorie standard de l'acoustique ne sont pas modifiées.

1. Montrer que l'équation de propagation des ondes sonores à une dimension s'écrit :
$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{\eta}{\mu_0 c^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2 \partial t} = 0$$
2. Donner la relation de dispersion des OPPH*.
3. Evaluer l'ordre de grandeur du rapport $r = \frac{\eta\omega}{\mu_0 c^2}$ dans l'air. En déduire une expression approchée de k' et k'', parties réelle et imaginaire du vecteur d'onde ; commenter. Evaluer la distance caractéristique d'atténuation du son pour différentes fréquences du spectre audible.
Données : pour l'air : $\eta_{air} = 1{,}85.10^{-5}$ Pa.s
pour l'eau : $\eta_{eau} = 1{,}00.10^{-3}$ Pa.s

Exercice 9 : Amortissement du son dans l'air par conduction thermique

On cherche ici à étudier l'influence de la conduction thermique sur la propagation des ondes sonores dans un gaz comme l'air, conduction que nous avons négligée dans le cours. En revanche, l'écoulement associé à l'onde sonore est toujours supposé non visqueux. On se limite à une propagation unidimensionnelle et l'on décrit l'onde sonore par les champs : $p(x,t) = p_0 + p_1(x,t)$; $\rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1(x,t)$; $T(x,t) = T_0 + T_1(x,t)$; $\vec{v}(x,t) = v_1(x,t)\overrightarrow{u_x}$. On se place bien sûr dans l'approximation acoustique.

On adopte le modèle du gaz parfait, et le gaz a pour capacité thermique massique à volume constant $c_V = \frac{R}{(\gamma-1)M}$, pour coefficient $\gamma = 1{,}4$, pour masse molaire $M = 29$ g.mol^{-1}, pour conductivité thermique $\lambda \approx 4{,}0.10^{-2}$ W.m^{-1}.K^{-1} à $T_0 = 300$ K et $p_0 = 1$ bar .

1. Parmi les trois équations de base qui régissent les ondes sonores dans les fluides, on peut en conserver deux. Lesquelles ?

2. Une des équations de base de ce problème s'écrit de la manière suivante, dans l'approximation acoustique : $\rho_0 c_V \frac{\partial T_1}{\partial t} = -p_0 \mathrm{div}\overrightarrow{v_1} + \lambda \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}$. Que traduit-elle ? Donner le sens physique de chacun de ses termes.
3. La quatrième équation dont on a besoin est l'équation d'état linéarisée. L'écrire.

Muni de ces quatre équations, on aboutit alors après quelques menus (!) calculs à l'équation de propagation à une dimension des ondes sonores s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2}\right) = \frac{\lambda}{\rho_0 c_V}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{p_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2}\right)$$

4. Examiner cette équation et la commenter. Commenter également les deux cas limites d'un fluide soit extrêmement bon, soit extrêmement mauvais conducteur de la chaleur.
5. Donner la relation de dispersion d'une OPPH*. On posera : $\varepsilon = \frac{\lambda}{\rho_0 c_V}\frac{k^2}{\omega} = \frac{\lambda}{\rho_0 c_V}\frac{\omega}{c^2}$ où c désigne la vitesse du son usuelle, et on mettra la relation de dispersion sous la forme : $k^2 = f(\varepsilon).\frac{\omega^2}{c^2}$.
6. Evaluer numériquement ε pour diverses fréquences du spectre audible et ultrasonore (par exemple 40 kHz). Qu'en dîtes-vous ?
7. En déduire une expression approchée de k. Commenter. Calculer numériquement la distance d'atténuation du son pour quelques fréquences. Comparer aux résultats obtenus dans l'exercice précédent. Conclure.

Exercice 10 : Onde sonore dans un pavillon exponentiel

A la sortie d'un tuyau sonore cylindrique de section S_0 se produit un phénomène de réflexion quasi-totale dû à la discontinuité de section entre le tuyau et le milieu ambiant. La conséquence directe de cela est une inefficacité rédhibitoire en termes de rayonnement sonore. Pour pallier cet inconvénient, on envisage d'intercaler entre le tuyau cylindrique et l'air ambiant un pavillon dont la section croît graduellement de manière exponentielle, dans le but de limiter la réflexion.

On envisage donc la propagation d'ondes sonores dans un volume d'air limité par une surface de révolution d'axe (Ox) et de section variable $S(x) = S_0 \exp(\alpha x)$ où $\alpha > 0$. On se place dans l'approximation acoustique et on suppose que la section varie assez doucement pour que l'écoulement associé à l'onde soit quasi-unidimensionnel : celle-ci est donc décrite par $p_1(x,t)$, $\mu_1(x,t)$ et $\overrightarrow{v_1}(x,t) = v_1(x,t)\overrightarrow{u_x}$.

1. Quelles conditions doit vérifier α pour que l'approximation quasi-unidimensionnelle ait un sens ? On formulera ces conditions en faisant intervenir la longueur d'onde λ et la section initiale S_0. Donner l'ordre de grandeur de α pour une clarinette, un saxophone soprano ou une trompette.
2. En faisant un bilan de masse sur une « tranche » d'air de longueur dx délimitée à gauche par $S(x)$ et à droite par $S(x+dx)$, trouver une équation linéaire aux dérivées partielles liant μ_1 et v_1. Pour quelle raison ne peut-on pas simplement utiliser l'équation locale de continuité ?
3. Expliquer pourquoi l'équation locale traduisant la loi de la quantité de mouvement reste vraie, sans adaptation. Montrer que : $\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$.
4. On en cherche la solution en OPPH*. Trouver la relation de dispersion. Discuter la nature des ondes selon les valeurs de leur pulsation. On donnera des valeurs numériques. Comment peut-on qualifier le comportement en fréquence du pavillon ?

Exercice 11 : Accrétion stellaire dans le modèle de Jeans (oral X-ENS PSI)

Le processus d'accrétion conduisant à la formation d'une étoile résulte d'un couplage entre champ gravitationnel et ondes mécaniques du type acoustique. Nous allons rechercher une condition pour qu'un gaz interstellaire puisse s'effondrer sur lui-même. Dans le modèle de Jeans, la matière stellaire est supposée infinie et homogène, de sorte qu'à l'équilibre, le milieu est au repos, la masse volumique ρ_0 et la pression p_0 sont uniformes et le champ de gravitation $\overrightarrow{g_0}$ est nul.

On considère une perturbation localisée autour d'un point O, à symétrie sphérique. Cette perturbation est décrite, en coordonnées sphériques, par les champs de masse volumique, de pression, de vitesse et de gravitation indicés « 1 » : $\rho(r,t) = \rho_0 + \rho_1(r,t)$; $p(r,t) = p_0 + p_1(r,t)$; $\vec{v}(r,t) = v_1(r,t)\overrightarrow{u_r}$; $\vec{g}(r,t) = g_1(r,t)\overrightarrow{u_r}$. On suppose l'évolution du gaz isentropique et on se place dans le cadre de l'approximation acoustique.

1. Ecrire les trois équations linéaires de l'acoustique en tenant compte de la gravitation. Quelle est la quatrième équation locale liant le champ de gravitation $\vec{g} = \overrightarrow{g_1}$ à la fluctuation de masse volumique ρ_1 ?
2. Montrer que ρ_1 est solution de l'équation aux dérivées partielles :
$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - \frac{c^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial r}\right) = 4\pi \mathcal{G} \rho_0 \rho_1$$
où c désigne la vitesse du son dans le milieu et $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle.

   Donnée : $\mathrm{div}(A(r,t)\overrightarrow{u_r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A(r,t)\right)$.

On cherche une solution de cette équation sous la forme : $\rho_1(r,t) = \frac{K}{r}\exp i(\omega t - kr)$ où ω est a priori **complexe** et k est **réel** positif.

3. Trouver la relation de dispersion et définir une longueur d'onde λ_J minimale, dite « de Jeans » pour que l'accrétion s'enclenche.
4. En déduire l'ordre de grandeur de la masse minimale M_J d'un amas stellaire pour qu'il s'effondre sur lui-même.
5. Si la condition d'accrétion est vérifiée, quelle est la durée caractéristique de l'effondrement ?

3. Réflexion des ondes sonores

Exercice 12 : Tuyau d'orgue

Un tuyau d'orgue est assimilable à un tuyau de longueur $\ell = 1$ m fermé à l'une de ses extrémités et ouvert à l'autre. Les pressions, température et masse volumique moyenne de l'air contenu dans le tuyau sont : $P_0 = 1{,}013$ bar ; $T_0 = 290$ K; $\mu_0 = 1{,}22$ kg.m^{-3}. L'air est assimilé à un gaz parfait de coefficient $\gamma = 1{,}4$.

1. Déterminer les fréquences f_0 et f_1 du fondamental et du premier harmonique.
2. À la fréquence f_1, on a mesuré une amplitude maximale $a_0 = 1$ mm des déplacements de l'air. En déduire l'amplitude correspondante p_0 pour la surpression et θ_0 pour la température.

Exercice 13 : Flûte traversière

Une flûte traversière est modélisée à un tuyau de section S constante et de longueur ℓ ouvert à ses deux extrémités. Lorsque le musicien souffle dans l'embouchure latérale de la flûte, les vibrations produites par sa langue excitent une onde stationnaire harmonique décrite par la surpression acoustique $p(x,t) = P_a \cos(\omega t)\cos(kx + \alpha)$.

1. Quelles sont les conditions aux limites aux deux extrémités ? Pourquoi modéliser l'onde sonore par une onde stationnaire ?
2. Déterminer complètement l'onde de pression ainsi que les fréquences de sons pouvant être joués par cette flûte.
3. La flûte émet un do à 264 Hz quand tous ses trous sont bouchés, à une température de 20°C. Quelle est la longueur ℓ de la flûte, sachant que seul le fondamental est excité ?
4. Quelle est la fréquence du son émis à une température de 10°C, tous les trous étant bouchés ?
5. Où se trouve le trou qu'on doit déboucher pour jouer un ré à 294 Hz, à une température de 20°C ?
6. Déterminer le champ des vitesses dans le tuyau ainsi que le vecteur de Poynting acoustique moyen.

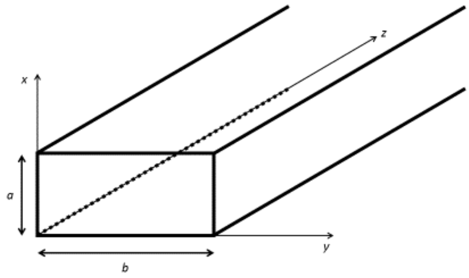
Exercice 14 : Clarinette

Une clarinette est modélisée à un tuyau de section S constante et de longueur ℓ fermé à une extrémité et ouvert à l'autre extrémité. Lorsque le musicien souffle dans le bec de la clarinette, l'anche se met à vibrer, ce qui provoque l'apparition d'une onde sonore décrite par la surpression acoustique
$p(x,t) = P_a \cos(\omega t)\cos(kx + \alpha)$.

1. Quelles sont les conditions aux limites aux deux extrémités ? Pourquoi modéliser l'onde sonore par une onde stationnaire ?
2. Déterminer complètement l'onde de pression ainsi que les fréquences de sons pouvant être joués par cette clarinette.
3. La note fondamentale d'une flûte de longueur ℓ a pour fréquence $f_f = \frac{c}{2\ell}$. Comparer la hauteur des sons produits par une flûte et une clarinette de même longueur.
4. Quelle est la fréquence de la note jouée par une clarinette de 65 cm de long dont tous les trous sont bouchés à l'exception de celui du milieu, à une température de 20°C ?
5. Déterminer le champ des vitesses dans le tuyau ainsi que le vecteur de Poynting acoustique moyen.

Exercice 15 : Guide d'ondes sonores rectangulaire et propagation par ondes planes

On s'intéresse à la propagation d'une onde sonore le long d'un tuyau de section rectangulaire ($a = 8$ mm et $b = 10$ mm) :



Les parois du tuyau sont supposées infiniment rigides et la propagation s'effectue dans l'air. On cherche le champ de pression de cette onde sous la forme : $p_1(x, y, z, t) = f(x)g(y) \exp i(\omega t - kz)$.

1. Montrer que les solutions possibles pour le champ de pression sont de la forme :
   $p_1(x, y, z, t) = A_{nm} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \exp i(\omega t - kz)$ où n et m sont des entiers naturels. Commenter.
2. Donner la relation de dispersion $k(\omega)$ et montrer qu'il existe une pulsation de coupure ω_c^{nm} pour le mode de propagation (n, m) avec n et m non simultanément nuls. Décrire et interpréter les phénomènes susceptibles de se produire selon la fréquence. Examiner les vitesses de phase et de groupe.
3. Qu'en est-il pour le mode $(0,0)$? Comment peut-on le qualifier ? Possède-t-il une fréquence de coupure basse ? Sa propagation est-elle dispersive ?
4. Calculer la plus basse fréquence de coupure. Est-il légitime de considérer que seules des ondes planes se propagent dans le tuyau ?

Exercice 16 : Modes propres d'une salle

On considère une salle parallélépipédique de dimensions $L_x \times L_y \times L_z$ (avec $L_x > L_y > L_z$) délimitée par 6 parois infiniment rigides.

On prendra comme exemple une salle de dimensions 20 m × 10 m × 4 m.

On en cherche les modes propres pour le champ de pression acoustique sous la forme :

$$p_1(x, y, z, t) = A \cos(k_x x + \varphi_x) \cos(k_y y + \varphi_y) \cos(k_z z + \varphi_z) \cos(\omega t)$$

1. Commenter la forme de la solution recherchée et préciser au maximum l'expression des modes propres pouvant s'établir dans la salle.
2. Montrer que les pulsations propres de la salle sont données par :
   $$\omega_{n_x, n_y, n_z} = c \sqrt{\frac{\pi^2 n_x^2}{L_x^2} + \frac{\pi^2 n_y^2}{L_y^2} + \frac{\pi^2 n_z^2}{L_z^2}}$$
   où n_x, n_y et n_z sont trois entiers naturels. Quelle est la plus basse fréquence pouvant exister dans la cavité ? Commenter.

Pour que l'acoustique d'une salle soit bonne, il est nécessaire que ses modes propres ne soient pas « séparables » c'est-à-dire discernables, de sorte que son comportement en fréquence soit le plus neutre possible. Nous allons donc chercher à déterminer l'écart en fréquence Δf_0 séparant deux modes consécutifs, autour d'une certaine fréquence f_0. Du fait de l'absorption par les parois de la salle et par les personnes présentes, le son est amorti sur un temps caractéristique τ, dit temps de réverbération. De ce fait, chaque mode propre n'est pas strictement monochromatique, mais présente une largeur spectrale $(\Delta f)_{reverb} \approx \frac{1}{\pi\tau}$ supposée indépendante du mode considéré. Il s'agira in fine de trouver une condition pour que $\Delta f_0 < \frac{(\Delta f)_{reverb}}{3}$ (critère empirique adopté usuellement).

On se place dans « l'espace des phases », c'est-à-dire dans le trièdre cartésien (O, k_x, k_y, k_z). L'origine correspond donc au vecteur d'onde nul.

3. Dans quel volume de cet espace sont contenu les modes de pulsation inférieure à $\omega_0 = 2\pi f_0$? Que vaut ce volume ?
4. Quel est le volume élémentaire de l'espace des phases occupé par un mode propre (n_x, n_y, n_z) ? On exprimera ce volume en fonction de L_x, L_y et L_z.
5. En déduire que le nombre $N(f_0)$ de modes propres de fréquence inférieure à f_0 vaut sensiblement : $N(f_0) \approx \frac{4\pi V f_0^3}{3c^3}$ où V est le volume (physique !) de la salle.
6. Justifier enfin que l'écart en fréquence Δf_0 séparant deux modes consécutifs, dont les fréquences sont proches de f_0 vaut : $\Delta f_0 = \frac{\pi c^3}{4\pi V f_0^2}$.
7. Quelle est la fréquence minimale f_{min} (fréquence dite de Schröder) pour laquelle les modes ne sont pas séparables ? Commenter.
   Donnée : $\tau = \frac{4V}{\alpha c S}$ où S est la surface totale des parois de la salle et α leur coefficient moyen d'absorption (on prendra $\alpha \approx 0{,}25$).

Exercice 17 : Modes propres d'une cavité sphérique

On étudie ici les ondes sonores susceptibles de s'établir dans une cavité sphérique solide de centre O et de rayon a remplie d'un gaz. On cherche des solutions harmoniques de la forme

$\underline{p_1}(r,t) = \frac{A}{r}\exp i(\omega t - kr) + \frac{B}{r}\exp i(\omega t + kr)$.

1. Interpréter la forme des solutions recherchées. Quelle condition doivent vérifier les constantes A et B ? Exprimer le champ des vitesses $\underline{\overrightarrow{v_1}}(r,t)$ associé.
2. On suppose que la paroi de la cavité sphérique est parfaitement rigide. Montrer que les pulsations propres de la cavité sont de la forme $\omega_p = \frac{c}{a}\zeta_p$, $p \in \mathbb{N}^*$, où les ζ_p sont des nombres sans dimension, solutions d'une équation (E) à déterminer. Montrer que
$$p\frac{\pi c}{a} < \omega_p < \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi c}{a}$$
3. L'expérience a été réalisée avec de l'argon de masse molaire $M = 39{,}95$ g.mol^{-1} à la température $T = 273{,}15$ K imposé par un bain marie d'eau et de glace dans une cavité sphérique de rayon $a = 8{,}915$ cm. Le tableau ci-dessous fournit les valeurs des fréquences propres f_p mesurées et des paramètres ζ_p associés calculés numériquement pour les huit premiers modes :

f_p (Hz)	2468,9	4244,9	5991,6	7729,1	9453,7	10937,1	12932,4	14657,7
ζ_p	4,493	7,725	10,904	14,066	17,221	20,371	23,520	26,666

En déduire une estimation de la vitesse du son dans l'argon à la température $T = 273{,}15$ K. Que pensez-vous de la mesure obtenue pour le mode n°6 ? Comment peut-on interpréter cette discordance ?

Exercice 18 : Hautbois

Un hautbois est modélisé par un tuyau conique de sommet O, d'axe de symétrie Ox, de longueur ℓ et d'angle au sommet α. L'extrémité du cône est ouverte sur l'atmosphère. On suppose que l'onde sonore régnant dans le hautbois est caractérisée par une surpression acoustique $p_1(x,t)$, une fluctuation de masse volumique $\rho_1(x,t)$ et un champ de vitesse $\vec{v}(x,t)$. On note $S(x)$ la section du tuyau conique à l'abscisse x.

1. En effectuant un bilan de masse sur une tranche de cône comprise entre les abscisses x et $x + dx$, montrer qu'à l'ordre 1 : $S\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial (Sv_1)}{\partial x} = 0$.
2. En déduire que l'équation de propagation régissant la surpression acoustique s'écrit :
$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{c^2}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)$$
3. Que vaut $S(x)$? En déduire que $\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{c^2}{x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xp_1)$.
4. On cherche une solution de la forme : $p_1(x,t) = \frac{f(x)}{x}\cos \omega t$. Déterminer complètement le champ de surpression acoustique $p_1(x,t)$. Quelles sont les fréquences propres d'un hautbois de longueur ℓ ?

Exercice 19 : Filtrage acoustique par un mur

Le mur est modélisé par une membrane de surface S, de masse volumique ρ et d'épaisseur e en translation au voisinage de $x = 0$. L'air, de masse volumique $\mu_0 = 1{,}2$ kg.m^{-3}, est à la température 20°C. On cherche à déterminer les ondes transmise et réfléchie en $x = 0$ pour une onde incidente de vitesse $v_i(x < 0, t) = A_i \exp j(\omega t - kx)$.

1. On considère que la membrane se trouve constamment en $x = 0$. À quelle condition cette approximation est-elle valable ?
2. Donner la forme des ondes de pression et de vitesse du côté (1) : $x < 0$ et du côté (2) : $x > 0$.
3. Écrire les conditions aux limites en *x* = 0.
4. En déduire le coefficient complexe de transmission en vitesse $\tau(j\omega)$, puis celui en puissance $T(\omega)$. Commenter le type de filtre obtenu au vu de la fonction de transfert $\tau(j\omega)$. Donner l'expression de sa fréquence de coupure.
5. Pour $\rho = 1800$ kg.m^{-3}, quelle est l'épaisseur du mur permettant une atténuation de 40 dB à 400 Hz ? Quels instruments d'un groupe de rock entend-on le mieux à travers un mur ?

Exercice 20 : Gel échographique

Les impédances caractéristiques de l'air et des tissus musculaires pour les ultrasons valent $Z_a = 400$ kg.m^{-2}.s^{-1} et $Z_m = 1{,}7.10^6$ kg.m^{-2}.s^{-1}.

1. Calculer le coefficient de transmission des puissances sonores à l'interface air-muscle et commenter dans le contexte d'une échographie.

Pour supprimer l'onde réfléchie, on réalise une couche de gel anti-reflet d'épaisseur e, d'impédance Z_g. On note c_a, c_g et c_m les célérités du son dans chacun des trois milieux et on pose $k_a = \frac{\omega}{c_a}$, $k_g = \frac{\omega}{c_g}$ et $k_m = \frac{\omega}{c_m}$. On cherche alors en notation complexe des champs de vitesse dans les trois milieux de la forme : $\begin{cases} v(x<0,t) = A_a \exp i(\omega t - k_a x) \\ v(0<x<e,t) = A_g \exp i\left(\omega t - k_g x\right) + B_g \exp i\left(\omega t + k_g x\right) \\ v(x>e,t) = A_m \exp i(\omega t - k_m x) \end{cases}$.

2. Justifier la forme de ces expressions.
3. Quelle est la forme du champ de surpression dans les trois milieux ?
4. Écrire les conditions aux limites et en déduire les valeurs qu'il faut choisir pour e et Z_g.
5. Commenter la puissance acoustique reçue dans le muscle, dans cette configuration.

Exercice 21 : Lévitation acoustique

On peut observer une expérience de lévitation acoustique à l'adresse suivante : http://www.youtube.com/watch?v=669AcEBpdsY. Le dispositif est constitué en bas d'un émetteur sonore et en haut d'un miroir acoustique parfait. Les billes sont en polystrène.

Il est donc possible de faire léviter une petite bille solide de masse volumique ρ_s dans une zone de l'espace où règne une onde sonore stationnaire suffisamment puissante. Le rayon de la bille est très inférieur à la longueur d'onde et on néglige la perturbation apportée par la bille à l'onde sonore. On néglige l'influence de la pesanteur sur l'onde sonore, ainsi que la viscosité de l'air. On note ρ_0 la masse volumique de l'air et p_0 la pression en l'absence d'onde. On note c la célérité des ondes sonores. On admet que l'action de l'onde sonore sur la bille peut être remplacée par sa moyenne temporelle.

On place une membrane de haut-parleur à l'extrémité d'un tuyau de section $S = 0{,}1$ m^2 dont l'autre extrémité est fermée en $z = 0$ par une paroi fixe infiniment rigide. L'onde, sinusoïdale de fréquence $f = 20$ kHz, est émise par la membrane qui se déplace au voisinage du plan $z = L$ avec une vitesse $u(t) = U \sin \omega t$ où $U = 0{,}1$ m.s^{-1}. Dans le domaine $0 \leq z \leq L$, on cherche le champ des vitesses de l'onde sonore dans l'approximation acoustique, sous la forme : $v(z,t) = f(z) \sin \omega t$.

1. Quelle est la condition aux limites imposée par la membrane ? Justifier quantitativement que cette condition peut être écrite en $z = L$.
2. Déterminer complètement la fonction $f(z)$.

3. Déterminer les points où l'amplitude de la vitesse est maximale et la valeur v_M de cette amplitude maximale en fonction de U, L, ω et c. Déterminer les pulsations ω_n faisant diverger v_M et les interpréter concrètement. Par quoi est en réalité limitée la valeur de v_M lorsque $\omega = \omega_n$?
4. Déterminer le champ de pression $p(z,t) = p_0 + p_1(z,t)$. Peut-on interpréter la lévitation d'une bille solide ?

L'étude à l'ordre 1 étant insuffisante pour interpréter le phénomène, il faut donc abandonner l'approximation acoustique et mener l'étude à l'ordre 2. On ajuste la longueur L pour obtenir $v_M = 50$ m.s^{-1}. A l'ordre 2 en v_M, on cherche les champs de pression et de vitesse sous la forme : $\begin{cases} p(z,t) = p_0 + p_1(z,t) + p_2(z,t) \\ v(z,t) = v_1(z,t) + v_2(z,t) \end{cases}$. Les termes d'indice 1 sont les solutions des équations linéarisées étudiées précédemment, les termes d'indice 2 sont des termes correctifs d'ordre 2 en v_M. On admet que $p_2(z,t)$ est solution de l'équation : $\frac{\partial^2 p_2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{v_1^2}{2}\right) - \frac{\rho_0}{c^2} v_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial p_1}{\partial t}\frac{\partial v_1}{\partial z}$. On cherche une solution sous la forme : $p_2(z,t) = \frac{\rho_0^\alpha v_M^\beta}{4}\cos\left(\frac{2\omega z}{c}\right) + g(z)\cos(2\omega t)$.

5. Justifier sans calcul la présence d'un terme indépendant du temps et d'un terme dépendant sinusoïdalement du temps de pulsation 2ω dans l'expression de $p_2(z,t)$.
6. Le rayon de la bille étant faible, il est possible d'assimiler la bille à une particule de fluide soumise à une force volumique de pression $\overrightarrow{f_{vol}} = -\overrightarrow{\nabla P}$. Calculer la force moyenne $\langle \vec{F} \rangle$ subie par la bille dans le champ de l'onde sonore.
7. Discuter graphiquement l'existence de positions d'équilibre et leur stabilité.
8. Quelle est la valeur maximale de la masse volumique d'une bille susceptible de léviter ? Qu'en dîtes vous ?

.