Lycée GUSTAVE EIFFEL Bordeaux Aquitaine

PSI*

Ondes électromagnétiques

1. Ondes électromagnétiques dans le vide

Exercice 1 : Superposition de deux OPPH

On considère deux OPPH de même amplitude E_0, de même pulsation ω, polarisées rectilignement selon $\vec{u}_y$, se propageant respectivement selon $\vec{u}_1 = \sin\alpha\,\vec{u}_x + \cos\alpha\,\vec{u}_z$ et $\vec{u}_1 = -\sin\alpha\,\vec{u}_x + \cos\alpha\,\vec{u}_z$ (avec $0 \leq \alpha \leq \pi/2$). Les deux ondes sont en phase à l'origine des coordonnées.

1. Calculer le champ électrique total (réel). Décrire l'onde obtenue : est-elle plane ? progressive ? harmonique ?
2. Calculer le champ magnétique total (réel). Commenter.
3. Calculer le vecteur de Poynting moyen. Commenter.

Exercice 2 : Laser Mégajoule

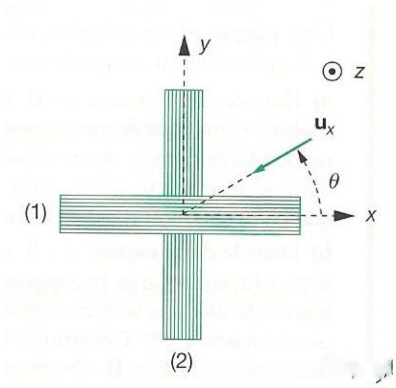
Le laser Mégajoule a été mis en service au Barp (Gironde) à la fin des années 1990 dans le but de simuler les effets des charges nucléaires en se passant désormais de véritables explosions. Il délivre des impulsions d'énergie $\mathcal{E} = 1{,}8$ MJ et de durée $\tau \approx 4$ ns. L'énergie des impulsions est focalisée sur une sphère de diamètre 2,4 mm.

Calculer l'ordre de grandeur des champs électrique et magnétique mis en jeu.

Justifier que la matière s'ionise totalement sur le trajet du laser, se transformant en plasma.

Exercice 3 : Radiogoniomètre

Une antenne réceptrice est constituée de deux bobines identiques (1) et (2), croisées à 90° et comportant chacune *N* spires carrées de côté *a* contenues respectivement dans les plans verticaux *xOz* et *yOz*. Lorsque l'antenne reçoit une onde électromagnétique plane progressive harmonique se propageant selon la direction $\vec{u}_X$ du plan horizontal, repérée par l'angle θ, il apparaît aux bornes des bobines deux tensions $e_1(t)$ et $e_2(t)$.



1. A quelle condition peut-on considérer le champ électromagnétique de l'onde comme uniforme sur l'antenne ?
2. Montrer que la mesure de $e_1(t)$ et $e_2(t)$ permet de déterminer la direction de propagation de l'onde incidente. Cette technique fonctionne-t-elle quelle que soit la polarisation de l'onde ? Cette technique fonctionne-t-elle encore pour une onde non harmonique ? Le champ magnétique terrestre est-il gênant ?
3. De combien d'antennes réceptrices doit-on disposer pour localiser un émetteur, toutes les antennes étant dans le plan horizontal ?

Exercice 4 : Paquet d'ondes planes progressives dans le vide

On considère un paquet d'ondes planes progressives se propageant dans le vide, polarisé rectilignement selon $\vec{u}_y$. Le paquet d'onde est défini par : $\underline{\vec{E}}(x,t) = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(k)\, e^{i(\omega t - kz)} dk\right] \vec{u}_y$ avec $\tilde{E}(k) = A = cste$ pour $k \in \left[k_0 - \frac{\Delta k}{2}, k_0 + \frac{\Delta k}{2}\right]$ et $\tilde{E}(k) = 0$ pour $k \notin \left[k_0 - \frac{\Delta k}{2}, k_0 + \frac{\Delta k}{2}\right]$.

1. Que représente $\tilde{E}(k)$? Calculer $\underline{\vec{E}}(x,t)$. Tracer $\underline{\vec{E}}(x,t)$ en fonction de x pour t fixé si $\Delta k \ll k_0$. Interpréter.
2. Calculer l'intensité $I(x,t)$ de l'onde. Tracer $I(x,t)$ en fonction de x à t fixé puis en fonction de t à x fixé. Définir et calculer l'étalement spatial Δx et temporel Δt de l'onde. Quelles relations a-t-on entre Δx et Δk ? entre Δt et $\Delta \omega$? Commenter.
3. Calculer l'énergie contenue dans un cylindre de section droite S de longueur infinie selon la direction de propagation. Commenter le cas d'une onde plane monochromatique ($\Delta k = 0$) et conclure.

Donnée : $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin X}{X}\right)^2 dX = \pi.$

Exercice 5 : Pouvoir rotatoire d'un milieu chiral

Dans un milieu chiral, les OPPH polarisées circulairement se propagent différemment (vitesses de propagation différentes) selon qu'elles sont polarisées circulairement à gauche (vecteur d'onde

$k_G = \frac{\omega}{c} n_G$ où n_G désigne l'indice de réfraction du milieu pour une OPPH PCG) ou droite (vecteur d'onde $k_D = \frac{\omega}{c} n_D$ où n_D désigne l'indice de réfraction du milieu pour une OPPH PCD)). Une OPPH se propageant selon $\vec{u}_x$ polarisée rectilignement selon $\vec{u}_y$ arrive sur le plan $x = 0$ et traverse une épaisseur *L* de milieu chiral.

Montrer qu'en $x = 0$, l'onde est polarisée rectilignement dans une direction faisant l'angle α avec $\vec{u}_y$. Exprimer α en fonction des données. Quelle application voyez-vous à ce résultat ?

Exercice 6 : Comment faire tourner une onde polarisée rectilignement

Une onde électromagnétique plane, rectilignement polarisée selon Ox, se propage selon Oz. On désigne par E_0 l'amplitude du champ électrique, k la norme du vecteur d'onde et ω la pulsation.

On place sur le trajet du faisceau lumineux un polariseur orienté pour transmettre une polarisation rectiligne perpendiculaire à Oz et faisant un angle θ par rapport à $\vec{e}_x$.

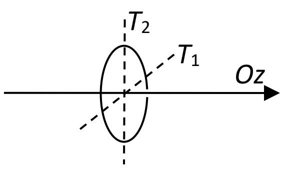
1. Donner l'expression du champ électrique de l'onde après la traversée du polariseur.
2. Donner l'expression du coefficient de transmission en énergie du polariseur. Quelle est la perte d'énergie de l'onde à la traversée du polariseur ?

On place maintenant sur le trajet de l'onde N polariseurs en série. Le polariseur numéro n est orienté pour transmettre une polarisation rectiligne formant un angle $n\theta$ par rapport à la polarisation initiale de l'onde.

3. Quelle est l'amplitude du champ électrique transmis après traversée des N polariseurs ?
4. On choisit dans tout la suite $\theta = \frac{\pi}{2N}$. Quel est l'état de polarisation final de l'onde transmise ? Montrer que pour une valeur de N suffisamment grande, le dispositif précédent permet de faire tourner une polarisation rectiligne de $\frac{\pi}{2}$ avec une perte d'énergie négligeable.
5. Combien de polariseurs faut-il utiliser pour que les pertes d'énergie de ce système soient inférieures à 1 %?

Exercice 7 : Polariseur rectiligne non idéal

On considère un polariseur dichroïque réel dont la propriété est de transmettre avec des coefficients distincts la lumière dont les directions de polarisation rectilignes coïncident avec deux directions orthogonales, appelées directions principales de la lame. On donne les coefficients de transmission en énergie (rapport de l'intensité transmise sur l'intensité incidente) selon ces directions de polarisation orthogonales, T_1 dans la direction de transmission privilégiée, T_2 dans la direction orthogonale, avec $T_1 > T_2$. On considère dans la suite des ondes électromagnétiques se propageant selon l'axe Oz, et des polariseurs placés orthogonalement à Oz.



1. Une onde électromagnétique plane, polarisée rectilignement, arrive normalement sur le polariseur. Le vecteur champ électrique de l'onde fait un angle θ avec la direction de transmission privilégiée du polariseur, supposée parallèle à l'axe Ox. Calculer le coefficient de transmission T en énergie de l'onde à travers le polariseur en fonction de T_1, T_2 et θ. Commenter en envisageant le cas du polariseur idéal.

On considère maintenant une onde de lumière naturelle se propageant selon Oz arrivant normalement sur un ensemble de deux polariseurs réels placés successivement orthogonalement à

Oz. On note α l'angle que forment les directions de transmission privilégiées de chaque polariseur. On admet qu'on peut écrire le champ électrique relatif à cette onde sous la forme :

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz - \varphi_x(t))\vec{u}_x + E_0 \cos\left(\omega t - kz - \varphi_y(t)\right)\vec{u}_y$$

où $\varphi_x(t)$ et $\varphi_y(t)$ sont des phases variant aléatoirement de manière très rapide par rapport aux temps caractéristiques des détecteurs optiques.

2. Exprimer le coefficient de transmission en énergie T_α de l'ensemble des deux polariseurs en fonction de T_1, T_2 et α.
3. Déterminer $T_{\alpha=0}$ et $T_{\alpha=90°}$, et montrer que ces résultats étaient prévisibles sans calcul.
4. Donner l'expression approchée de T_α pour $T_2 \ll T_1$. Commenter.

Exercice 8 : Source lumineuse isotrope

Une source lumineuse isotrope située à l'origine O de l'espace crée un champ électromagnétique, de telle sorte qu'en coordonnées sphériques de centre O, le vecteur de Poynting en un point M de l'espace est radial et ne dépend spatialement que de r, distance à la source : $\vec{\pi}(M,t) = \pi(r,t)\overrightarrow{u_r}$.
Il n'y a pas de matière en dehors de la source.

1. Exprimer la puissance rayonnée $P_r(t)$ à travers la sphère de centre O et de rayon r en fonction de la norme $\pi(r,t)$ du vecteur de Poynting.
   a. On considère le volume situé entre deux sphères de centre O et de rayon respectifs r_1 et r_2. A l'aide d'un bilan d'énergie électromagnétique, montrer que la puissance moyenne rayonnée est la même à travers les deux sphères.
   b. En déduire, à une constante multiplicative près, la loi de dépendance spatiale de $\pi(r,t)$.
   c. L'énergie que la terre reçoit du soleil est sous forme de rayonnement électromagnétique. Si la distance terre-soleil variait d'un facteur 2, comment varierait l'énergie reçue par la terre ?
2. On suppose que les champs électrique et magnétique sont orthogonaux et de normes telles que $B = E/c$ où c est la vitesse de la lumière. Comment décroissent les normes des champs électrique et magnétique en fonction de r ?
3. On considère une ampoule électrique de puissance $P = 20$ W (puissance électrique moyenne reçue par l'ampoule). Cette puissance est quasi intégralement rayonnée sous forme d'ondes électromagnétiques. On suppose que le champ rayonné suit les hypothèses décrites précédemment.
   a. Calculer la norme du vecteur de Poynting moyen à 1 m de l'ampoule.
   b. En déduire la norme des champs électrique et magnétique.
   c. Comparer au champ magnétique terrestre et au champ électrique entre les deux bornes d'une prise électrique.

Exercice 9 : Onde cylindrique guidée par une antenne rectiligne

Un fil rectiligne infini confondu avec l'axe *Oz* est parcouru par un courant de la forme

$i(z,t) = i_0 \cos(\omega t - kz)$. On introduit le repère cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ d'axe *Oz*.

1. Préciser les propriétés a priori (composantes et dépendance en coordonnées) du champ électromagnétique. Justifier que la composante E_z est négligeable si on se place dans la « zone de rayonnement » définie par $r \gg \lambda$.

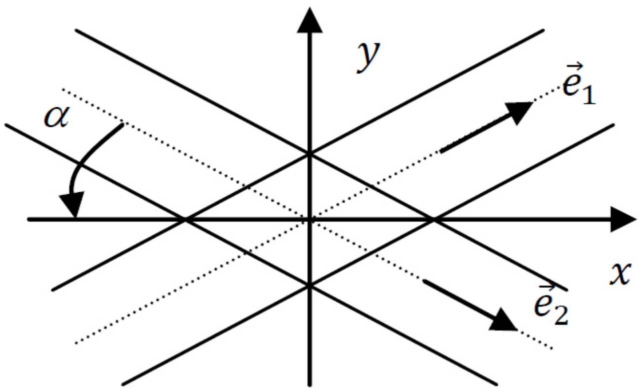
2. Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}\,(M,t)$ puis celle de $\vec{E}(M,t)$.
3. Quelles sont les caractéristiques de l'onde créée par le fil ?
4. Calculer la puissance rayonnée par unité de longueur d'antenne. Commenter.

Donnée : $\mathrm{div}\vec{C} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rC_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial C_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial C_z}{\partial z}$

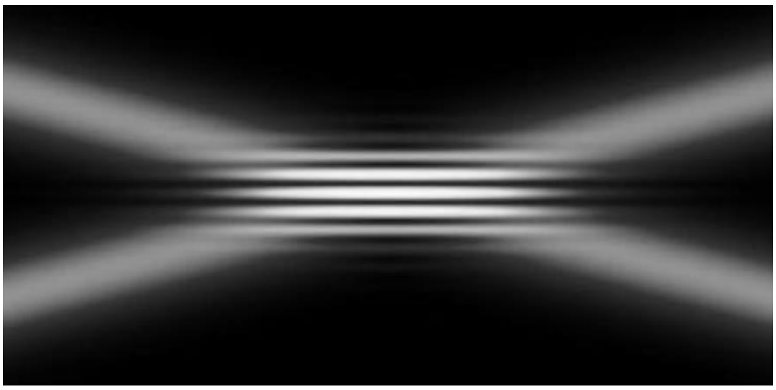
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{C} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial C_z}{\partial \theta} - \frac{\partial C_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rC_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$$

Exercice 10 : Vélocimétrie Laser

La vélocimétrie laser à franges (VLF) est une technique de mesure de la vitesse d'écoulement de fluide n'utilisant qu'un laser et un aérosol dispersé dans le courant de fluide qu'on cherche à étudier. Cette technique de mesure fournit des mesures locales et instantanées de la vitesse du fluide. Un laser produit un faisceau monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 514{,}5$ nm séparé en deux faisceaux cohérents par un ensemble de séparatrices et miroirs. Un montage réfracte ces faisceaux (sous un angle $\alpha = 1{,}7°$ qui se superposent dans une zone où l'on voit apparaître des franges d'interférences rectilignes. Le fluide d'étude s'écoule parallèlement à l'axe (Oy). On modélise chaque faisceau ($i = 1$ ou 2) par une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement selon (Oz) de champ électrique en notation complexe $\underline{\overrightarrow{E_i}}(\vec{r},t) = E_0 \exp j\left(\omega t - \overrightarrow{k_i}\cdot\vec{r}\right)\overrightarrow{u_z}$ de même amplitude. Les vecteurs d'onde $\overrightarrow{k_i}$ sont orientés par les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_i}$.



1. Exprimer les composantes cartésiennes des vecteurs d'onde en fonction de λ_0 et de l'angle α.
2. Exprimer le champ électrique total $\underline{\vec{E}}(\vec{r},t)$ dans la zone de recouvrement (appelée « champ d'interférences »).
3. L'intensité lumineuse dans cette zone s'écrit $I(\vec{r}) = \left|\underline{\vec{E}}(\vec{r},t)\right|^2$. Exprimer $I(\vec{r})$ et expliquer l'allure de la figure d'interférences suivante que l'on observerait si on plaçait un écran dans le plan xOy :



4. Exprimer et calculer numériquement la période spatiale i de la figure d'interférences (que l'on nomme interfrange).
5. Les particules de l'aérosol dispersées dans l'écoulement émettent un scintillement de fréquence f = 1,153 MHz en passant dans le champ d'interférences. En déduire la vitesse de l'écoulement.

2. *Dispersion et atténuation des ondes électro-magnétiques*

Exercice 11 : Oscillations de plasma. Propagation d'une onde longitudinale dans un plasma.

On utilise le modèle introduit en cours pour décrire les propriétés électromagnétiques d'un plasma (ions immobiles, électrons en mouvement non relativiste, temps de collision infini car plasma dilué…). On s'intéresse ici à la propagation d'une onde électromagnétique de champ électrique :

$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\, \vec{u}_x$.

1. Caractériser cette onde. Que vaut le champ magnétique associé ?
2. Ecrire l'équation du mouvement d'un électron et relier $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ et $\vec{E}$.
3. Trouver une autre relation liant $\vec{j}$ et $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Quel est son sens physique ?
4. En déduire l'équation locale régissant les variations de $\vec{E}$. Donner la « relation de dispersion » $\omega(k)$. Commenter. Calculer la vitesse de groupe d'un paquet d'onde de pulsation centrale ω. Commenter.
5. Calculer le vecteur de Poynting ainsi que la densité volumique d'énergie électromagnétique $w(x,t)$. Que peut-on en conclure ?
6. Calculer la densité volumique d'énergie cinétique des électrons libres. Commenter.

Exercice 12 : Dispersion dans un monocristal de chlorure de sodium

La dispersion des ondes électromagnétiques dans un monocristal de NaCl est caractérisée par la relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{e\ell}\frac{\omega_L^2-\omega^2}{\omega_T^2-\omega^2}$ où $\epsilon_{e\ell}$ est une constante positive sans dimension, et $\omega_L =$ 4,4.10^{13} rad.s^{-1} et $\omega_T =$ 2,8.10^{13} rad.s^{-1}.

1. Tracer la courbe $k(\omega)$.
2. Discuter, en fonction de la fréquence, la possibilité qu'a une onde électromagnétique de se propager. Préciser pour chaque domaine de fréquences la forme de l'onde.
3. On envoie sur le monocristal de NaCl une onde sous incidence normale. Que lui arrive-t-il selon la valeur de sa fréquence ?
4. Dans le domaine optique, $\omega^2 \gg \omega_L^2$. Y a-t-il dispersion dans ce domaine ? Que vaut la vitesse de phase de l'onde ? Une mesure expérimentale donne un indice de réfraction $n =$ 1,55 pour $\lambda =$ 600 nm. Que vaut la constante $\epsilon_{e\ell}$?

Exercice 13 : Propagation dans l'eau de mer

L'eau de mer est un lieu légèrement conducteur de conductivité $\gamma \approx 6\,\mathrm{S.m^{-1}}$. On s'intéresse à la propagation dans ce milieu d'une OPPH de pulsation ω. On admet que dans ce milieu, les équations de Maxwell qui régissent les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ s'obtiennent à partir de celles existant dans le vide, en remplaçant ϵ_0 par $\epsilon_0\epsilon_r$, où ϵ_r est un coefficient sans dimension (permittivité relative du milieu). On prendra pour l'eau $\epsilon_r \approx 80$.

1. Déterminer la relation de dispersion des OPPH dans ce milieu.
2. Déterminer la fréquence f_c qui délimite deux comportements limites du milieu de propagation.
3. On se place dans un premier temps à $f = 10$ GHz. Donner la forme approchée de la relation de dispersion et l'expression d'une OPPH polarisée rectilignement se propageant selon l'axe Ox dans ce milieu. Que vaut la vitesse de phase v_φ ? Y a-t-il dispersion ? Y a-t-il atténuation ?
4. On suppose maintenant que $f = 100$ MHz. Donner la forme approchée de la relation de dispersion et l'expression d'une OPPH polarisée rectilignement se propageant selon l'axe Ox dans ce milieu. Que vaut la vitesse de phase v_φ ? Y a-t-il dispersion ? Y a-t-il atténuation ? Déterminer la distance sur laquelle peut se propager cette onde avant de voir sa puissance divisée par 2.
5. Pour communiquer par radio avec un sous-marin, quel(s) domaine(s) de fréquence est-il préférable d'utiliser ? Proposer quelques valeurs numériques. Quel type d'ondes utilise-t-on usuellement pour les communications sous-marines ?

Exercice 14 : Effet de peau dans un conducteur cylindrique. Variation de la résistance d'un fil en fonction de la fréquence.

L'objet de cet exercice est de déterminer la répartition de la densité de courant et du champ électrique dans un fil conducteur plein et cylindrique, de conductivité σ, de rayon a et de grande longueur. Le fil transporte (dans l'ARQS magnétique) un courant d'intensité complexe : $\underline{I}(t) = I_0 \exp(i\omega t)$. On travaille en coordonnées cylindriques d'axe *Oz* (l'axe *Oz* étant évidemment l'axe de symétrie du fil).On cherche à déterminer $\underline{\vec{E}}(r,t) = E(r)\exp(i\omega t)\,\vec{u}_z$ et

$\underline{\vec{j}}(r,t) = j(r)\exp(i\omega t)\,\vec{u}_z$ à l'intérieur du fil.

Formulaire : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{C} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial C_z}{\partial\theta} - \frac{\partial C_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rC_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial\theta}\right)\overrightarrow{u_z}$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{C}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\vec{C}\right) - \overrightarrow{\Delta C}$

1. On donne la conductivité du cuivre : $\sigma = 5{,}9.10^7\ \Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$. Quelle approximation peut-on faire concernant la densité de courant de déplacement et la densité de courant de conduction dans le métal ? Jusqu'à quelle fréquence cette approximation est-elle justifiée ? Commenter. Dorénavant, on suppose cette approximation valide.
2. Montrer que $E(r)$ est régi par l'équation aux dérivées partielles :
$$\frac{d^2E}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dE}{dr} = i\mu_0\sigma\omega E(r)$$

3. On suppose que dans le cuivre et aux fréquences de travail ($f \sim$ 10 MHz) la profondeur de peau δ est très inférieure au rayon a du fil. Quelle nouvelle approximation peut-on raisonnablement faire dans l'équation précédente ? En déduire que le champ électrique s'écrit, dans le conducteur :
   $\vec{E}(r,t) \approx \frac{1+i}{2\pi a\sigma\delta} I_0 exp\left(-\frac{a-r}{\delta}\right) \exp i\left(\omega t - \frac{a-r}{\delta}\right) \vec{u}_z$, où l'expression de δ est à déterminer.
4. Calculer numériquement δ. L'hypothèse précédente est-elle justifiée ?
5. Calculer la puissance moyenne cédée par le champ aux charges de la portion située entre les abscisses z et $z + dz$ du conducteur. En déduire que la résistance linéique de celui-ci s'écrit : $\rho_0 = \frac{1}{\sigma 2\pi a\delta}$. Commenter ce résultat. Comment varie la résistance linéique ρ_0 en fonction de la fréquence ?

Exercice 15 : Propagation d'ondes électromagnétiques dans un isolant

Une onde plane monochromatique de pulsation ω se propage suivant Ox dans un milieu neutre isolant. Dans chaque atome du milieu, les électrons (masse m, charge $-e$, densité volumique n), sont liés au noyau supposé immobile. La force rappelant les électrons vers leur position d'équilibre est modélisée par une force élastique $\overrightarrow{f_e} = -K\vec{r}$. Les électrons subissent également une force de type frottement fluide $\overrightarrow{f_d} = -\alpha \frac{d\vec{r}}{dt}$, modélisant la dissipation due aux collisions au rayonnement. On posera $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$, $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}$ et $\tau = \frac{\alpha}{m}$.

1. Déterminer l'équation du mouvement d'un électron et en déduire le vecteur densité de courant $\overrightarrow{J_p}$ (traduisant les oscillations des électrons) en fonction du champ électrique $\vec{E}$ de l'onde.
2. Déterminer la relation de dispersion. La simplifier dans le cas où l'absorption est négligeable, ce qu'on suppose par la suite.
3. Montrer alors qu'il n'y a pas de propagation dans une bande de pulsations à déterminer.
4. Dans le cas où la propagation est possible, déterminer la vitesse de phase v_φ et l'indice de réfraction n. Tracer la courbe $n(\omega)$. Existe-t-il des domaines de pulsations non dispersifs ?
5. Montrer que les vitesses de phase et de groupe sont reliées par $v_\varphi v_g = \frac{c^2}{1+\frac{\omega_0^2\omega_p^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}}$.
6. Déterminer la valeur moyenne $\langle\vec{\pi}\rangle$ du vecteur de Poynting en fonction de E_0, ε_0, v_φ et c.
7. Déterminer la valeur moyenne $\langle u_{em}\rangle$ de l'énergie électromagnétique volumique en fonction de E_0, ε_0, v_φ et c.
8. Déterminer les valeurs moyennes $\langle e_c\rangle$ et $\langle e_p\rangle$ de l'énergie cinétique volumique et de l'énergie potentielle volumique en fonction de E_0, ε_0, ω_0, ω_p et ω.
9. Calculer l'énergie volumique moyenne totale $\langle u_{tot}\rangle$ et en déduire la vitesse de propagation de l'énergie.

Exercice 16 : Correction ionosphérique GPS

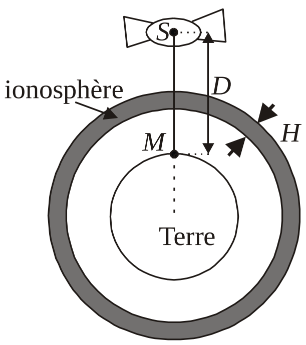
On considère une onde se propageant dans l'ionosphère, plasma dilué localement neutre contenant n électrons libres par unité de volume. La charge d'un électron est notée $-e$, sa masse m.

On considère une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement se propageant dans l'ionosphère, soit, en utilisant la notation complexe :

$\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}} \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$, $\underline{\vec{B}} = \underline{\overrightarrow{B_0}} \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$

1. Montrer que la relation de dispersion dans le plasma se met sous la forme $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ et exprimer la pulsation plasma ω_p en fonction de n, e, ϵ_0 et m. On pose $f_p = \omega_p / 2\pi$. En journée, cette fréquence est de l'ordre de 1 MHz.
2. On suppose $f > f_p$. Exprimer la vitesse de groupe v_g en fonction de f et de f_p.
3. Un satellite S se trouve au-dessus de l'ionosphère, d'épaisseur H, à la verticale d'un point M de la Terre. On note D la distance SM. La partie de l'atmosphère qui n'est pas l'ionosphère est assimilée au vide.

   Le satellite émet à $t = 0$ un paquet d'ondes de fréquence f telle que $f \gg f_p$. Déterminer l'instant t de réception du signal en M en fonction de D, c, H, f_p et f. On pourra utiliser le développement limité en 0 : $\sqrt{1+X} \approx 1 - \frac{X}{2}$ à l'ordre 1 en *X*.



4. Deux paquets d'ondes de fréquences f_1 et f_2 telles que $f_1 > f_2 \gg f$ sont émis simultanément en S à la date $t = 0$. Ils arrivent respectivement en M aux dates t_1 et t_2. Exprimer en fonction de H, c, f_p, f_1 et f_2 le décalage temporel $\Delta t = t_2 - t_1$ entre les deux paquets d'ondes à leur arrivée en *M*.
5. Déduire des deux questions précédentes que la distance entre *M* et le satellite peut s'écrire $D = ct - d$, avec :

$$d = \frac{c\Delta t}{f^2\left(\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2}\right)}$$

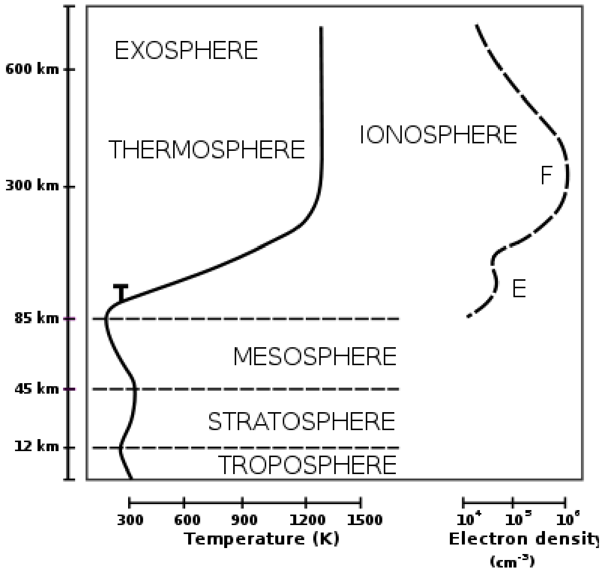
   Le terme d est appelé correction ionosphérique, obtenu par mesure de Δt en temps réel. Justifier son nom.

6. On donne : $f_1 =$ 1,575 GHz ; $f_2 =$ 1,228 GHz. On mesure $\Delta t =$ 75,8 ps. Quelle erreur sur D commettrait-on pour un signal de fréquence f_1 si l'on n'effectuait pas la correction ionosphérique ? Commenter cette valeur.

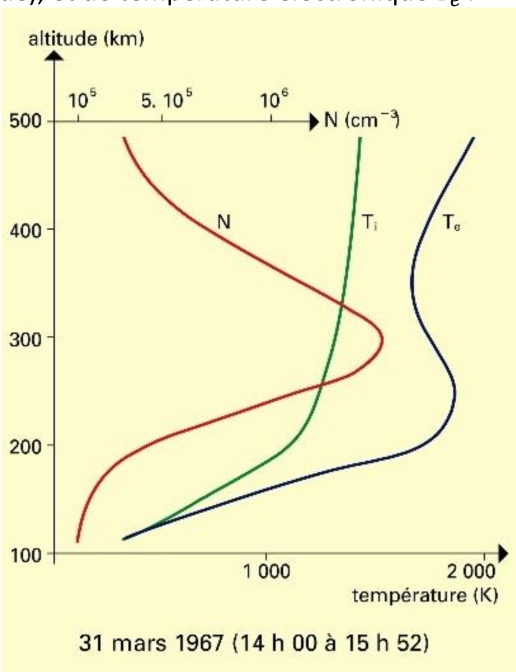
Exercice 17 : Quelques ordres de grandeur sur l'ionosphère

L'ionosphère est une région de la haute atmosphère comprise approximativement entre les altitudes 85 km et 600 km. L'objet de cet exercice est de discuter un certain nombre des hypothèses faites dans le cours sur l'étude des plasmas, dans le cas particulier de l'ionosphère. Les deux documents ci-dessous donnent un certain nombre de valeurs numériques en fonction de l'altitude :

- *Document 1* : Profil de température et de densité électronique en fonction de l'altitude.



- *Document 2* : Profil de densité électronique N, de température T_i (encore appelée température ionique), et de température électronique T_e .[1]



[1] *L'ionosphère est un plasma partiellement ionisé hors d'équilibre thermodynamique. La température ionique T_i mesure l'énergie cinétique d'agitation des ions et des neutres, tandis que la température électronique T_e mesure l'énergie cinétique d'agitation des électrons.*

1. Classique ou quantique ?
a. L'énergie cinétique d'agitation thermique d'un électron vaut en moyenne $E_c \approx k_B T_e$ où k_B est la constante de Boltzmann. Evaluer la longueur d'onde de de Broglie λ_{dB} des électrons en fonction notamment de la température électronique T_e.
b. Evaluer la distance moyenne d séparant deux électrons. Pensez-vous qu'il soit nécessaire de recourir à la mécanique quantique pour décrire le mouvement des électrons de l'ionosphère ?
c. Qu'en est-il des électrons de conduction dans un métal ?

2. Plasma cinétique ou plasma corrélé ?

Un plasma est dit cinétique si l'énergie d'interaction de ses constituants est beaucoup plus faible que leur énergie cinétique (il s'agit en quelque sorte d'un gaz parfait) : nous nous sommes placés dans ce cas dans le cours (plasma peu dense). Dans le cas contraire, on parle de plasma corrélé (les électrons sont corrélés car leurs interactions sont importantes).

a. Montrer que le rapport de l'énergie cinétique moyenne d'un électron à son énergie potentielle moyenne d'interaction avec un électron plus proche voisin peut s'écrire : $\frac{E_c}{E_p} = \frac{d}{\ell_L}$ où ℓ_L est la « longueur de Landau » du plasma, que l'on exprimera.
b. Le plasma ionosphérique est-il cinétique ou corrélé ? Sachant que la pression de l'ionosphère à l'altitude 85 km vaut 2 Pa, évaluer le taux d'ionisation de l'ionosphère à cette altitude. Commenter.

3. Interaction d'un électron avec une OPPH (pulsation ω, longueur d'onde λ)
a. A quelle condition sur l'amplitude ξ du mouvement de l'électron est-il légitime d'assimiler l'accélération de l'électron à la dérivée partielle de sa vitesse $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$?
b. A quelle condition sur l'amplitude ξ du mouvement de l'électron le champ électromagnétique vu par l'électron est-il uniforme sur toute sa trajectoire ?
c. Pour une onde de fréquence $f = 100$ MHz parcourant l'ionosphère, quelle est l'amplitude maximale de son champ électrique compatible avec les approximations précédentes ?
d. Quelle est l'amplitude minimale du champ électrique de l'onde permettant de négliger les interactions électron-électron ?

Exercice 18 : Siffleur ionosphérique

On considère une OPPH se propageant dans l'ionosphère parallèlement au champ magnétique terrestre $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$: la direction $\vec{u}_z$ est la direction locale du champ magnétique terrestre, supposé stationnaire et localement uniforme. L'onde que nous considérons est dite « polarisée circulairement à gauche »[2] : son champ électrique s'écrit

$$\vec{E}_g(x, y, z, t) = E_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t - kz) \\ \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'ionosphère (cf. exercice 20) est un plasma dilué de densité électronique n.

1. Ecrire les équations différentielles régissant les composantes $v_x(t)$ et $v_y(t)$ de la vitesse d'un électron. Que peut-on dire de $v_z(t)$? On posera $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$.
2. On pose $\underline{v}^+(t) \widehat{=} v_x(t) + i v_y(t)$. A l'aide de ce changement de variable, calculer les composantes $v_x(t)$ et $v_y(t)$, puis les composantes $j_x(t)$ et $j_y(t)$ du vecteur densité de courant.

[2] *On pourra aisément vérifier que l'extrémité du champ électrique décrit un cercle dans le sens direct dans un plan $z = cste$.*

3. Déterminer la relation de dispersion de cette OPPH circulaire gauche. On fera apparaître la pulsation « cyclotron » $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$ ainsi que la pulsation plasma du milieu.
4. Comment les résultats précédents seraient-ils modifiés dans le cas d'une onde circulaire droite de la forme $\vec{E}_d(x,y,z,t) = E_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t - kz) \\ -\sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$?
5. Le champ magnétique terrestre dans l'ionosphère est de l'ordre de 30 µT et la densité électronique n est de l'ordre de 10^{12} m^{-3}. Calculer ω_c et ω_p.
6. On suppose dorénavant que $\omega_c \gg \omega$. L'une des deux solutions précédentes ne peut se propager qu'au-delà d'une certaine fréquence seuil : identifier cette solution et calculer cette fréquence seuil.
7. Que peut-on dire de l'autre solution, dénommée « siffleur ionosphérique » ou onde « hélicon » ? Tracer la courbe $k(\omega)$ ainsi que $v_\varphi(\omega)$ pour un siffleur. Commenter.
8. Que se passe-t-il si l'onde arrivant sur l'ionosphère est polarisée rectilignement ?
9. Une fréquence typique d'un tel siffleur est 10 kHz. Calculer numériquement v_φ. Commenter. Evaluer le temps mis par un tel siffleur émis au pôle Nord pour rejoindre le pôle Sud.
10. Un siffleur est-il susceptible de se propager autour de la Terre, dans le plan de l'équateur ?

Exercice 19 : Propagation dans un plasma plongé dans un champ magnétique stationnaire (1) – effet Faraday.

On donne les principales propriétés d'un plasma, milieu gazeux dilué constitué de particules ionisées :

- on a le même nombre *n* de cations (de masse *M*) que d'électrons (de masse $m << M$) par unité de volume (la densité volumique de charges est donc nulle) ;
- les interactions entre ces particules sont négligeables, le milieu étant peu dense.

On applique à ce plasma un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B_1} = B_1\overrightarrow{e_z}$.

On considère une onde plane progressive harmonique se propageant dans le plasma dans la direction de $\overrightarrow{B_1}$, dont on donne les champs : $\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}} \exp j(\omega t - kz)$, $\underline{\vec{B}} = \underline{\overrightarrow{B_0}} \exp j(\omega t - kz)$. Le champ magnétique total dans le milieu est donc $\underline{\vec{B}} + \overrightarrow{B_1}$.

1. Montrer que $\underline{\overrightarrow{E_0}}$ et $\underline{\overrightarrow{B_0}}$ sont orthogonaux à $\vec{k}$. Exprimer $\underline{\vec{B}}$ en fonction de $\underline{\vec{E}}$, $\vec{k}$ et ω.

2. Ecrire la force exercée sur une particule et comparer les ordres de grandeur des différents termes intervenant dans cette force.

3. Déterminer, en régime permanent, la relation entre les composantes de $\underline{\vec{E}}$ et les composantes de la densité volumique de courant $\underline{\vec{j}}$. On posera $\omega_p^2 = ne^2/(m\epsilon_0)$ et $\omega_c = eB_1 / m$.
La résolution des équations de Maxwell dans ce cas conduit à l'existence de deux solutions pour k, k_1 et k_2 qui vérifient : $k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2\omega}{c^2(\omega+\omega_c)}$ avec $\underline{E_x} = -j\underline{E_y}$; et $k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2\omega}{c^2(\omega-\omega_c)}$ avec $\underline{E_x} = +j\underline{E_y}$.

4. Préciser les polarisations des ondes associées à chacune de ces deux solutions ?

5. Le plasma est compris entre les plans $z = 0$ et $z = e$. L'onde incidente est polarisée rectilignement selon $\overrightarrow{e_x}$ et possède une pulsation suffisamment grande pour que $k_1^2 > 0$ et $k_2^2 > 0$. En sortie du plasma, l'onde est toujours polarisée rectilignement mais dans une autre direction. Expliquer le phénomène et exprimer l'angle α dont a varié la direction de polarisation en fonction de k_1, k_2 et e.

Exercice 20 : Propagation dans un plasma plongé dans un champ magnétique stationnaire (2) – couche réfléchissante.

Un plasma d'électrons mobiles et d'ions considérés comme fixes est soumis à un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}_0 = B_0\overrightarrow{e_x}$. On note de manière usuelle $n_0, m, -e$ la densité particulaire, la masse et la charge des électrons, et $\omega_p = \sqrt{n_0 e^2/(m\epsilon_0)}$ la pulsation plasma.

On envisage la propagation dans ce plasma d'une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement, se propageant selon $+\overrightarrow{e_z}$, et d'amplitude E_0.

1. Donner l'expression complexe du champ électrique $\underline{\vec{E}}$ relatif à cette onde.
2. Par une analyse qualitative, indiquer si la relation de dispersion est modifiée par la présence du champ $\overrightarrow{B_0}$ dans chacun des cas suivants :
   - le champ électrique est polarisé parallèlement à $\overrightarrow{B_0}$;
   - le champ électrique est polarisé perpendiculairement à $\overrightarrow{B_0}$.

Dans le cas où la relation est modifiée, on montre que la nouvelle relation de dispersion est :

$$k^2c^2 = \frac{(\omega^2-\omega_p^2)^2-\omega_c^2\omega^2}{\omega^2-\omega_p^2-\omega_c^2} \quad \text{avec } \omega_c = eB_0/\,m.$$

3. Déterminer les valeurs ω_1 et ω_2 de ω pour lesquelles k s'annule et tracer l'allure de la fonction $k^2c^2 = f(\omega^2)$. Pour quelles pulsations l'onde peut-elle réellement se propager dans le milieu ?

On envoie vers l'ionosphère, plasma soumis au champ magnétique terrestre, l'onde précédente depuis le sol. Lorsque l'onde est polarisée parallèlement à $\overrightarrow{B_0}$, on observe une réflexion de l'onde pour des valeurs de longueur d'onde supérieur à $\lambda_0 = 42.70$ m. Lorsque l'onde est polarisée perpendiculairement à $\overrightarrow{B_0}$, on observe une réflexion de l'onde pour des valeurs de longueur d'onde supérieur à $\lambda'_0 = 38.90$ m.

4. Déduire de ces deux mesures la densité particulaire n_0 du plasma ainsi que la valeur du champ magnétique B_0.

Le champ magnétique terrestre décroît en fonction de l'altitude suivant la loi :

$$B_0(h) = B_0(0)(1 + h^2/\,R^2)^{-3/2}$$

où R est le rayon de la Terre et h l'altitude mesurée par rapport au sol.

5. Calculer l'altitude de la couche réfléchissante.
6. Démontrer la relation de dispersion modifiée donnée en début d'exercice.

Données :

$m = 9.3 \cdot 10^{-31}$kg, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$C, $\epsilon_0 = 8.9 \cdot 10^{-12}$F.m^{-1}, $R = 6400$ km, $B_0(0) = 4.7 \cdot 10^{-5}$T.

3. Réflexion des ondes électromagnétiques

Exercice 21 : Réflexion et transmission d'une onde électromagnétique à l'interface vide – plasma.

Un plasma occupe tout le demi-espace $z \geq 0$ (le demi-espace $z \leq 0$ est vide). Une OPPH polarisée rectilignement arrive sous incidence normale sur ce plasma :

$\underline{\vec{E}_i}(\vec{r}, t) = E_0 \exp i(\omega t - k_0 z)\ \vec{u}_x$ où $k_0 = \frac{\omega}{c}$ désigne le module du vecteur d'onde dans le vide.

On désigne par $\underline{r}$ et $\underline{t}$ les coefficients de réflexion et transmission pour l'amplitude du champ électrique, définis par : $\underline{r} \mathrel{\widehat{=}} \left(\frac{\underline{E_r}}{\underline{E_i}}\right)_{z=0}$ et $\underline{t} \mathrel{\widehat{=}} \left(\frac{\underline{E_t}}{\underline{E_i}}\right)_{z=0}$.

1. Ecrire les champs $[\underline{\vec{E}}, \underline{\vec{B}}]$ des trois ondes incidente, réfléchie et transmise en fonction notamment des coefficients $\underline{r}$ et $\underline{t}$, et de l'indice complexe $\underline{n}$ du plasma.
2. Quelles sont les conditions aux limites que vérifie le champ électromagnétique à l'interface vide – plasma ? En déduire l'expression de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de l'indice complexe $\underline{n}$ du plasma.
3. Calculer le vecteur de Poynting moyen associé à chacune des trois ondes incidente, réfléchie et transmise. En déduire l'expression des coefficients de réflexion et transmission en énergie $R \mathrel{\widehat{=}} \left(\frac{\|\langle \vec{\Pi}_r \rangle\|}{\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\|}\right)_{z=0}$ et $T \mathrel{\widehat{=}} \left(\frac{\|\langle \vec{\Pi}_t \rangle\|}{\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\|}\right)_{z=0}$.
   On rappelle la relation de dispersion des OPPH dans un plasma sans collisions :
   $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$.
4. Que vaut l'indice complexe $\underline{n}$ pour $\omega < \omega_p$? En déduire les valeurs de R et T dans ce domaine de fréquence. Conclure.
5. Répondre aux mêmes questions dans le domaine $\omega > \omega_p$.
6. Quelle est la relation liant R et T ? Interpréter.

Exercice 22 : Radar routier

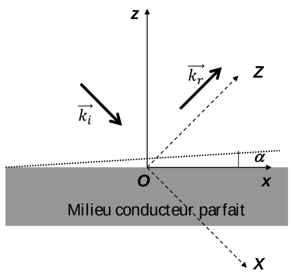
Un cinémomètre est un émetteur d'ondes électromagnétiques utilisé par la maréchaussée pour mesurer la vitesse des véhicules sur la route. On se propose d'en étudier le principe de fonctionnement. L'émetteur émet une onde plane progressive sinusoïdale vers les *x* croissants, qui se réfléchit sur la voiture dont on souhaite mesurer la vitesse. On assimile la voiture à un plan conducteur parfait, situé en *x* = 0 à l'instant *t* = 0. Ce plan conducteur est animé de la vitesse $\vec{v} = v\,\vec{u}_x$.

Question préliminaire : soit $[\vec{E}, \vec{B}]$ le champ électromagnétique mesuré dans le référentiel terrestre *R*, et $[\vec{E}', \vec{B}']$ le champ électromagnétique mesuré dans le référentiel en translation rectiligne uniforme *R'* par rapport à *R*. En invoquant le principe de relativité, exprimer $[\vec{E}', \vec{B}']$ en fonction de $[\vec{E}, \vec{B}]$.

1. En exprimant les conditions aux limites dans le référentiel adéquat, calculer à l'ordre 1 en $\frac{v}{c}$ le rapport des fréquences $\frac{f_r}{f_i}$ des deux ondes réfléchie par et incidente sur le cinémomètre. Calculer également le coefficient de réflexion pour le champ électrique (mesuré dans *R*).
2. Comment peut-on mesurer $\Delta f = f_i - f_r$?
3. Calculer le vecteur de Poynting moyen et la densité moyenne d'énergie électromagnétique en un point d'abscisse *x*. Commenter les résultats obtenus.

Exercice 23 : Expérience de Wiener

Une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale se réfléchit sous une incidence de 45° sur un conducteur parfait occupant tout le demi-espace $z \leq 0$. Le champ électrique incident s'écrit alors $\underline{\overrightarrow{E_i}} = \overrightarrow{E_0} \exp i(\omega t - kX)$ en notation complexe. Le champ électrique réfléchi est donc aussi réfléchi avec un angle de 45° par rapport à la normale *Oz*, et s'écrit donc : $\underline{\overrightarrow{E_r}} = \underline{\overrightarrow{E_1}} \exp i(\omega t - kZ)$. Les différents axes sont définis sur la figure ci-dessous :



Données : (i) la composante tangentielle du champ électrique s'annule à la surface d'un conducteur parfait ;

(ii) la composante normale du champ magnétique s'annule à la surface d'un conducteur parfait.

1. L'onde incidente est polarisée rectilignement perpendiculairement au plan d'incidence. Calculer la moyenne temporelle du carré du champ électrique total $\langle E_{tot}^2 \rangle (X, Z)$. Commenter.
2. L'onde incidente est maintenant polarisée rectilignement dans le plan d'incidence. Répondre aux mêmes questions.
3. On place une pellicule photosensible faisant un angle α très petit avec le plan conducteur au voisinage de celui-ci. Dans l'hypothèse où la pellicule est sensible à $\langle E_{tot}^2 \rangle (X, Z)$, décrire qualitativement et quantitativement ce que l'on observe sur la pellicule développée dans les deux cas envisagés ci-dessus.
4. Dans l'hypothèse où la pellicule serait sensible à $\langle B_{tot}^2 \rangle (X, Z)$, décrire sans calcul ce que l'on observerait dans les deux cas précédents.
5. L'expérience révèle une luminosité uniforme sur la pellicule pour un champ électrique polarisé dans le plan d'incidence, et des franges sombres et claires pour un champ électrique perpendiculaire au plan d'incidence. Conclure. Justifier la définition de l'éclairement vue en cours.

Exercice 24 : Pression de radiation

On considère une OPPH dont le champ électrique est donné par $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_y}$ comme un faisceau de photons se propageant dans la direction et le sens de $\overrightarrow{u_x}$. L'énergie d'un photon associé à cette onde est $h\nu$ et sa quantité de mouvement est $\frac{h\nu}{c}\overrightarrow{u_x}$, où ν désigne la fréquence de l'onde et *h* est la constante de Planck.

1. Exprimer le nombre N de photons traversant par unité de temps l'unité de surface perpendiculaire à Ox en fonction de l'éclairement $\mathcal{E}$ de l'onde.
2. L'onde arrive sur une surface plane perpendiculaire à Ox d'aire S, parfaitement réfléchissante. On étudie le rebond des photons sur cette surface.
   Quelle est la variation de la quantité de mouvement d'un photon lorsque celui-ci est réfléchi par la paroi ? En déduire la variation de la quantité de mouvement reçue par la paroi au cours d'un choc photon – paroi.
3. En déduire la pression p subie par la paroi en fonction de $\mathcal{E}$ et c puis en fonction de ϵ_0 et E_0.
4. Calculer $\mathcal{E}$, E_0 et p sur une paroi totalement réfléchissante pour un laser de diamètre $d\ = 5$ mm et de puissance moyenne égale à 100 W (laser utilisé industriellement pour la découpe de feuilles).

Une bille sphérique de rayon R et de masse m est plongée dans un faisceau laser cylindrique, homogène, vertical, se propageant vers le haut, dont l'éclairement vaut $\mathcal{E}$. Le rayon du faisceau est supérieur à R.

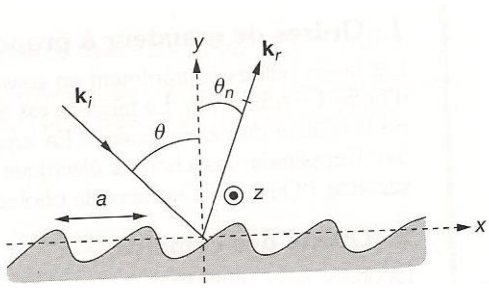
5. Quel est l'éclairement minimal $\mathcal{E}_m$ nécessaire pour faire léviter la bille ? Quelle est alors la puissance P_m reçue par la bille ?
   Calculer numériquement $\mathcal{E}_m$ et P_m sachant que le rayon de la bille vaut $R = 0{,}1\ \mathrm{mm}$ et que sa masse volumique vaut $\rho = 2{,}7.10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$.
6. En fait, la bille absorbe une fraction α de la puissance lumineuse incidente P_m. Elle cède à l'air ambiant par unité de temps une quantité de chaleur proportionnelle à sa surface et à la différence $T - T_a$ entre sa température T supposée uniforme et la température ambiante T_a. On note K le coefficient de proportionnalité. La capacité thermique massique de la bille vaut c_m.
   Déterminer la loi d'évolution $T(t)$ de la température de la bille en fonction du temps. La bille reste-t-elle solide ? Si non, la lévitation est-elle effectivement observable ?

Données : $\alpha = 5.10^{-4}$; $T_a = 300\ \mathrm{K}$; $K = 150\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}}$; $c_m = 900\ \mathrm{J.K^{-1}.kg^{-1}}$;
température de fusion du métal : $T_f = 933\ \mathrm{K}$.

Exercice 25 : Réflexion par une surface métallique périodique

On considère une OPPH polarisée rectilignement de la forme $\vec{E}_i = E_0 \exp i\big(\vec{k}_i.\vec{r} - \omega t\big)\,\vec{u}_z$ avec $\|\vec{k}_i\| = k = \frac{\omega}{c}$. Cette onde tombe sur la surface ondulée périodiquement d'un métal parfaitement conducteur, surface définie par son équation $y = f(x)$ où f est une fonction quelconque mais périodique de période a.

On cherche l'onde réfléchie sous la forme $\vec{E}_r = \underline{E_r}\,(x, y, z) \exp(-i\omega t)\ \vec{u}_z$.



1. Montrer que $\underline{E_r}$ est indépendant de z.
2. On cherche $\underline{E_r}$ sous la forme : $\underline{E_r}(x, y) = \underline{E_r^0} \exp i(\alpha x + \beta y)$.
   Donnée : la composante tangentielle du champ électrique s'annule à la surface d'un conducteur parfait.
   Montrer que α ne peut prendre que les valeurs discrètes définies par :
   $\alpha_n = k \sin\theta + n\frac{2\pi}{a}$ où θ est l'angle d'incidence.
3. Dans quelle direction θ_n est réfléchie l'onde correspondant à l'entier n ? Commenter.
4. Quelles sont les valeurs de β_n associées aux α_n ? On distinguera deux cas que l'on discutera physiquement en détail.

Exercice 26 : Téléphonie mobile et urbanisme

On désire modéliser simplement les problèmes de réflexion des ondes sur un immeuble en téléphonie mobile. Dans ce cadre, le champ électrique de l'onde émise par la station émettrice s'écrit :

$\underline{\vec{E}_i}(x, t) = E_0 \exp i\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)\vec{u}_z$. La fréquence de l'onde vaut $f = 860$ MHz.

Un immeuble situé en $x = L$ réfléchit l'onde sans l'atténuer et sans modifier sa polarisation, mais en la déphasant. Ainsi, le coefficient de réflexion sur le mur s'écrit :

$\underline{r} \triangleq \frac{\underline{E_r}(x=L,t)}{\underline{E_i}(x=L,t)} = \exp(i\phi)$ où $\underline{E_r}(x = L, t)$ est l'amplitude complexe de l'onde réfléchie.

On admet que la puissance $\mathcal{P}$ reçue par le téléphone mobile est proportionnelle à la valeur moyenne temporelle du carré du champ électrique. Par ailleurs, en dessous d'une valeur seuil $\mathcal{P}_s$, toute réception d'un signal est impossible. On admettra enfin que la moyenne *spatiale* de $\mathcal{P}$ est égale à $10\,\mathcal{P}_s$.

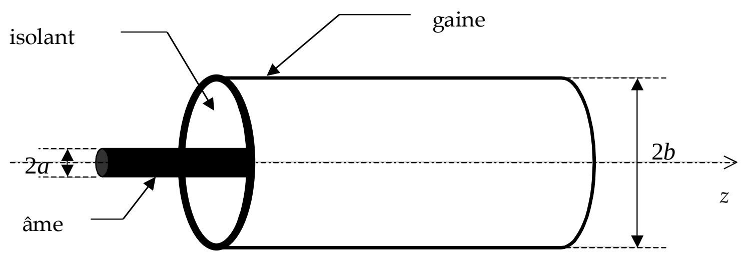
1. Ecrire le champ électrique de l'onde résultante et caractériser cette onde.
2. Le téléphone mobile se déplace à une vitesse v constante vers les x croissants. Quelle est la durée moyenne des coupures ? Examiner le cas d'un piéton et d'un automobiliste. Commenter.

Par ailleurs, en milieu urbain, les retards subis par les trajets réfléchis par rapport aux trajets directs sont de l'ordre de 1 µs.

3. Quelle est la valeur typique de $L - x$ associée à ce retard ?
4. On suppose que pour cette valeur typique de $L - x$ et pour la fréquence f, le signal reçu par le mobile de la part de la station émettrice a une puissance nulle. On augmente alors légèrement la fréquence de de f à de $f + \delta f$ pour rétablir la communication. Quelle valeur minimale doit-on donner à δf ?

Exercice 27 : Propagation du mode TEM dans un câble coaxial

L'objet de cet exercice est l'étude des phénomènes de propagation dans un câble coaxial. Celui-ci est constitué de deux cylindres conducteurs coaxiaux de section circulaire, de rayons respectifs $a = 0{,}43$ mm et $b = 1{,}47$ mm, de très grande longueur, séparés par un isolant. Le cylindre central (« l'âme ») est plein tandis que le cylindre extérieur (« la gaine ») est creux :



Les conducteurs sont supposés parfaits. L'isolant est du polyéthylène ; on admettra que tout se passe comme s'il suffisait de remplacer dans les équations de Maxwell la permittivité du vide ϵ_0 par $\epsilon_0\epsilon_r$ où $\epsilon_r = 2{,}25$. On travaille en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe *Oz*, l'axe *Oz* étant l'axe du câble coaxial.

On suppose que l'âme est parcourue par une intensité complexe $\underline{I}(z,t) = I_0 \exp i(\omega t - kz)$ (le sens positif du courant est donné par l'orientation de l'axe *Oz*). La gaine est, quant à elle, parcourue par l'intensité complexe opposée $-\underline{I}(z,t) = -I_0 \exp i(\omega t - kz)$

On suppose que le champ électromagnétique complexe dans le milieu isolant est de la forme
$$\begin{cases} \underline{\vec{E}} = E_0(r) \exp i(\omega t - kz)\, \overrightarrow{u_r} \\ \underline{\vec{B}} = B_0(r) \exp i(\omega t - kz)\, \overrightarrow{u_\theta} \end{cases}.$$

Cela revient à considérer une solution particulière des équations de Maxwell, dite « mode Transverse Electrique et Magnétique » (mode TEM).

Formulaire : $\overrightarrow{rot}\,\vec{C} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial C_z}{\partial \theta} - \frac{\partial C_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rC_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$

1. Cette solution particulière est-elle sinusoïdale ? progressive ? plane ? Pourquoi est-elle nommée « mode Transverse Electrique et Magnétique » ?
2. Donner, en la justifiant soigneusement, la relation de structure liant le champ magnétique $\vec{B}$ et le champ électrique $\vec{E}$? Commenter.
3. Calculer $B_0(r)$. En déduire l'expression de $E_0(r)$.
4. Déterminer la relation de dispersion de ce mode TEM. Interpréter ce résultat.
5. Calculer le vecteur de Poynting instantané ainsi que la puissance moyenne se propageant le long du câble. A quelle vitesse se propage l'énergie ?

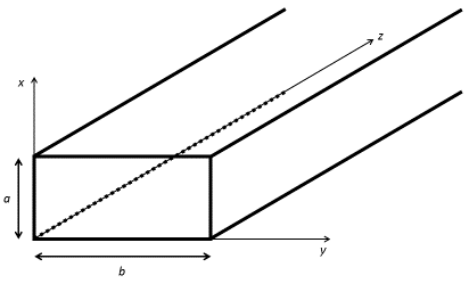
Exercice 28 : Atténuation du signal dans un câble coaxial

Nous cherchons maintenant à quantifier l'effet de la dissipation dans l'âme et dans la gaine, qui sont ici des conducteurs massifs caractérisés par la profondeur de peau $\delta(\omega)$ (on renonce donc au modèle du conducteur parfait). Nous reprenons l'ensemble des notations et résultats obtenus à l'exercice 27, à ceci près que nous supposons dorénavant que l'onde de courant parcourant l'âme est de la forme $\underline{I}(z,t) = I_0(z)\exp i(\omega t - kz)$ où $I_0(z)$ est une fonction réelle positive décroissante.
Nous avons montré à l'exercice 13 qu'un conducteur cylindrique de rayon R parcouru par un courant sinusoïdal était caractérisé d'un point de vue macroscopique par une résistance linéique s'écrivant : $\rho_0 = \frac{1}{\sigma 2\pi R\delta(\omega)}$.

1. A l'aide d'un bilan énergétique sur une portion bien choisie, évaluer la distance caractéristique ℓ d'atténuation de $I_0(z)$ en fonction notamment de $\delta(\omega)$, a et b.
2. Comment ℓ varie-t-elle avec la fréquence ? Existe-t-il une valeur du rapport $\frac{b}{a}$ qui maximise ℓ à fréquence donnée ? Commenter en lien avec les données numériques du problème ($a = 0{,}43$ mm et $b = 1{,}47$ mm). Calculer ℓ numériquement pour $f = 1$ MHz et $f = 100$ MHz.

Exercice 29 : Propagation des modes TE le long d'un guide d'onde rectangulaire

On s'intéresse à la propagation d'une onde électromagnétique le long d'un guide d'onde de section rectangulaire ($a = 25$ mm et $b = 50$ mm) :



Les conducteurs qui constituent les parois du guide sont supposés parfaits et l'intérieur du guide est vide. On suppose que l'onde est Transverse Electrique (« TE ») et, sans un premier temps, qu'elle est polarisée rectilignement selon $\vec{u}_y$. On cherche le champ électrique de cette onde sous la forme : $\vec{E}(x,y,z,t) = f(x,y)\exp i(\omega t - kz)\vec{u}_y$.

1. Montrer que la forme la plus générale d'un tel champ « TE_{n0} » polarisé selon $\vec{u}_y$ s'écrit : $\vec{E}_{n0}(x,z,t) = E_{n0}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\exp i(\omega t - kz)\vec{u}_y$. Commenter.
2. Donner la relation de dispersion $k(\omega)$ et montrer qu'il existe une pulsation de coupure ω_c^{n0}. Décrire et interpréter les phénomènes susceptibles de se produire selon la fréquence. Examiner les vitesses de phase et de groupe.
3. Donner sans calcul la forme du champ $\vec{E}_{0m}$ d'une onde « TE_{0m} » polarisée selon $\vec{u}_x$.
4. Dans le cas d'une onde « TE_{nm} » présentant à la fois une composante selon $\vec{u}_x$ et selon $\vec{u}_y$, les choses sont plus compliquées, et on admet que la composante du champ magnétique selon $\vec{u}_z$ s'écrit : $B_z(x,y,z,t) = B_{nm}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\exp i(\omega t - kz)$.

   Calculer les 6 premières fréquences de coupures des 6 premiers modes TE susceptibles de se propager. Quel est le « mode dominant », c'est-à-dire celui dont la fréquence de coupure est la plus basse ? Un paquet d'onde de fréquence centrale 4 GHz et de largeur spectrale 10 MHz est-il susceptible de se propager le long du guide selon un seul mode TE (fonctionnement « monomode ») ?

5. On revient au cas des modes « TE_{n0} ». Calculer le champ magnétique $\vec{B}_{n0}(x,z,t)$ d'un tel mode. Commenter.
6. Calculer la puissance moyenne transportée dans ce mode le long du guide. Si les conducteurs n'étaient pas parfaits, quelle en serait la conséquence la plus importante ?

Exercice 30 : Atténuation dans un guide d'onde

On reprend le guide d'onde rectangulaire de l'exercice précédent, et on s'intéresse aux modes TE_{n0}. Les notations sont inchangées.

Le métal constituant les parois n'est pas parfait et a pour conductivité γ. Pour évaluer les pertes, on considère que dans un guide conducteur réel, l'expression locale du champ reste la même que pour un guide conducteur parfait, avec une atténuation selon *z*. Les pertes par effet Joule s'effectuent dans les conducteurs sur une épaisseur de l'ordre de $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$. On suppose que les courants sont uniformément répartis dans l'épaisseur δ de conducteur.

1. Calculer la puissance moyenne dP perdue par le champ dans une longueur d*z* de guide.
2. Montrer que la puissance moyenne transportée par le guide décroît exponentiellement : $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{L}\right)$, avec : $L = \frac{a^2 b}{\delta} \frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}}}{\left(\frac{a^2\omega^2}{c^2} + \frac{2bn^2\pi^2}{a}\right)}$.
3. En déduire comment évolue une onde de fréquence donnée contenant plusieurs modes de propagation.
4. Calculer *L* pour une onde de fréquence $f = 10^{10}$ Hz. Commenter. Proposer une technique permettant de réduire les pertes.

Données : $a = 2b = 5$ cm ; $\gamma = 5{,}8.10^7$ S.m^{-1}.

Exercice 31 : Facteur de qualité d'une cavité électromagnétique

On considère une cavité électromagnétique unidimensionnelle vide comprise entre deux plans conducteurs de surface S et s'étendant dans les deux demi-espaces $x \leq -L$ et $x \geq 0$. On suppose qu'il règne dans la cavité une onde dont le champ électrique est polarisé rectilignement selon $\vec{u}_y$.

1. Les deux conducteurs sont dans un premier temps supposés parfaits. Le mode propre numéro n de la cavité idéale s'écrit $\vec{E}_n(x,t) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)\vec{u}_y$. Que vaut la pulsation ω ? Quel est le champ magnétique $\vec{B}_n(x,t)$ associé ?

Données : (i) Le champ magnétique au voisinage d'un conducteur parfait est lié à la densité surfacique de courant $\vec{j}_S$ par la relation : $\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_S \times \vec{n}$ où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal au conducteur, orienté vers l'extérieur du conducteur.

(ii) On s'intéresse à la répartition des courants volumiques dans le conducteur s'étendant dans le demi-espace $x \geq 0$. Le vecteur densité de courant surfacique $\vec{j}_S$ (modèle du conducteur parfait) est relié au vecteur densité de courant $\vec{j}$ (qui est la grandeur dotée de réalité physique) par la relation : $\vec{j}_S(t) = \int_0^{+\infty} \vec{j}\,(x,t)dx$.

2. Montrer que $\vec{j}(x \geq 0, t) = \frac{\sqrt{2}E_0}{\mu_0 c\delta} e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_y$ où δ est la profondeur de peau du métal (on a donc abandonné le modèle du conducteur parfait).
3. Calculer la puissance moyenne P dissipée dans les deux conducteurs délimitant la cavité.

On définit le facteur de qualité Q de la cavité par la relation :

$$Q \triangleq 2\pi \frac{\textit{énergie moyenne stockée dans la cavité}}{\textit{énergie moyenne dissipée dans les parois sur une période}}$$

4. Calculer Q en fonction de L et δ. Effectuer l'application numérique pour du cuivre ($\sigma = 5{,}7.10^7\ \Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$) dans le mode $n = 1$ et pour une fréquence $f = 1$ GHz. Commenter.
5. Pouvez-vous évaluer l'évolution temporelle de l'amplitude du champ $E_0(t)$ compte tenu des pertes ?
6. Pouvez-vous évaluer l'ordre de grandeur de la variation relative de la pulsation de résonance de la cavité du fait des pertes ?

Exercice 32 : Cavité électromagnétique 3D

On considère une cavité parallélépipédique de dimensions $L_x \times L_y \times L_z$ (avec $L_x > L_y > L_z$) délimitée par 6 plans conducteurs parfaits.

On en cherche les modes propres sous la forme :

$$\underline{\vec{E}}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} E_x^0 \cos(k_x x + \varphi_x) \sin(k_y y + \varphi_y) \sin(k_z z + \varphi_z) \\ E_y^0 \sin(k_x x + \varphi_x) \cos(k_y y + \varphi_y) \sin(k_z z + \varphi_z) \\ E_z^0 \sin(k_x x + \varphi_x) \sin(k_y y + \varphi_y) \cos(k_z z + \varphi_z) \end{pmatrix} \exp(i\omega t)$$

1. Préciser au maximum la forme des modes propres pouvant s'établir dans la cavité.
2. Commenter la forme de ces modes.
3. Quelles sont les pulsations propres de la cavité ? Quelle est la plus basse fréquence pouvant exister dans la cavité ?