

# P01: PROPAGATION NON DISPERSIVE 1D:

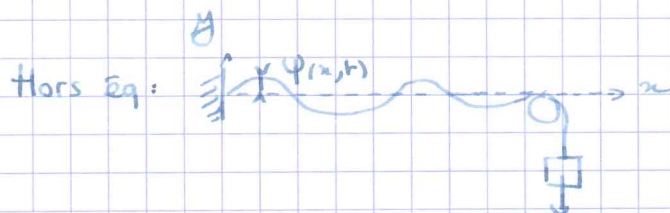
## CORDE VIBRANTE ET CABLE COAXIAL

### I - Equation de d'Alembert

1. Ondes transversales sur une corde infiniment souple dans l'approximation des petits mouvements

(a) Hypothèses du modèle: A l'éq

eq  $T_0$  corde:  $L \quad \mu = \frac{m}{L}$



$\Psi(x,t) = \text{dépl}^r$  transversal algébrique

- ⊗ Hypothèses:
  - corde = inextensible
  - corde  $\infty^t$  souple
  - ss raideur
  - on néglige le poids de la corde  $T_0 \gg mg$
  - "petites" déformations: cf. plus loin

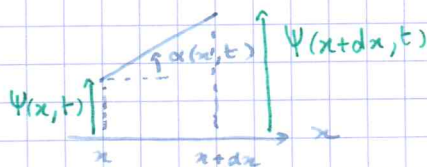
(b) Mise en équation

→ élément de corde  $[x, x+dx]$

⊗ Un peu de géométrie

$$\tan \alpha(x,t) = \frac{\Psi(x+dx,t) - \Psi(x,t)}{dx}$$

$$= \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x,t)$$



⊗ petits movts:  $|\alpha| \ll 1$  donc  $\alpha(x,t) \approx \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x,t)$

→ longueur de l'élément:  $dl^2 = dx^2 + d\Psi^2$

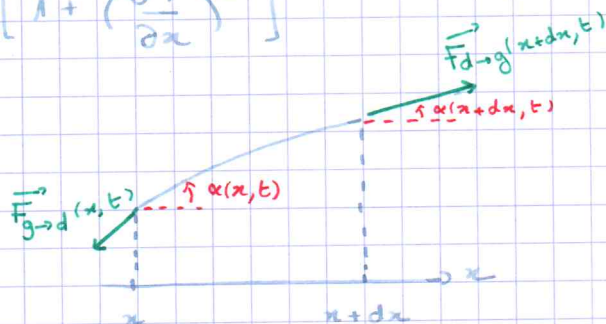
$$= dx^2 \left[ 1 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$dl \approx dx \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \right) \approx dx$$

⊗ corde sans raideur: ( $\Leftrightarrow \vec{F}_{dg} \parallel \text{corde}$ )

Soit  $\vec{F}_{d \rightarrow g}(x,t)$  = force de tension ext en  $x$  à  $t$  par la partie droite sur la partie gauche de la corde -

$$\vec{F}_{dg}(x,t) = \begin{pmatrix} T(x,t) \cos \alpha(x,t) \\ T(x,t) \sin \alpha(x,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{//}(x,t) \\ F_{\perp}(x,t) \\ \vec{e}_x, \vec{e}_y \end{pmatrix}$$



② PFD appliqué à  $[x, x+dx]$ :

$$\Delta m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{F}_{x \rightarrow y}(x+dx, t) + \vec{F}_{y \rightarrow x}(x, t)$$

→ projeté sur  $\vec{u}_x$ :

$$0 = T(x+dx, t) \cos \alpha(x+dx, t) - T(x, t) \cos \alpha(x, t)$$

⇒  $\cos \alpha(x, t) \times T(x, t) = \text{cste le long de la corde}$

$$\Rightarrow T(x, t) = \text{cste} = 1 \times T_0$$

$$\cos \alpha \approx 1 \text{ à l'ordre 2} \quad \uparrow \quad = T_0$$

par  $\alpha$   $\uparrow$   
 $x=L$

→ projeté sur  $\vec{u}_y$ :  $\mu dx \times \frac{\partial v_{\perp}}{\partial t} = F_{\perp}(x+dx, t) - F_{\perp}(x, t)$

$$\approx \frac{\partial F_{\perp}}{\partial x} dx$$

$$\Rightarrow \mu \frac{\partial v_{\perp}}{\partial t} = \frac{\partial F_{\perp}}{\partial x}$$

$$\text{or } \frac{\partial F_{\perp}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (T(x, t) \underbrace{\sin \alpha(x, t)}_{\approx \alpha(x, t)}) = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t) = T_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial F_{\perp}}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

(c) Equation de d'Alembert 1D - célérité des ondes transversales

$$\mu v_{\perp}(x, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) \Rightarrow \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

i.e.  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$  où  $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$

(d) Equations de couplage: lient les dépendances temporelles et spatiales de  $v_{\perp}(x, t)$  et  $F_{\perp}(x, t)$ .

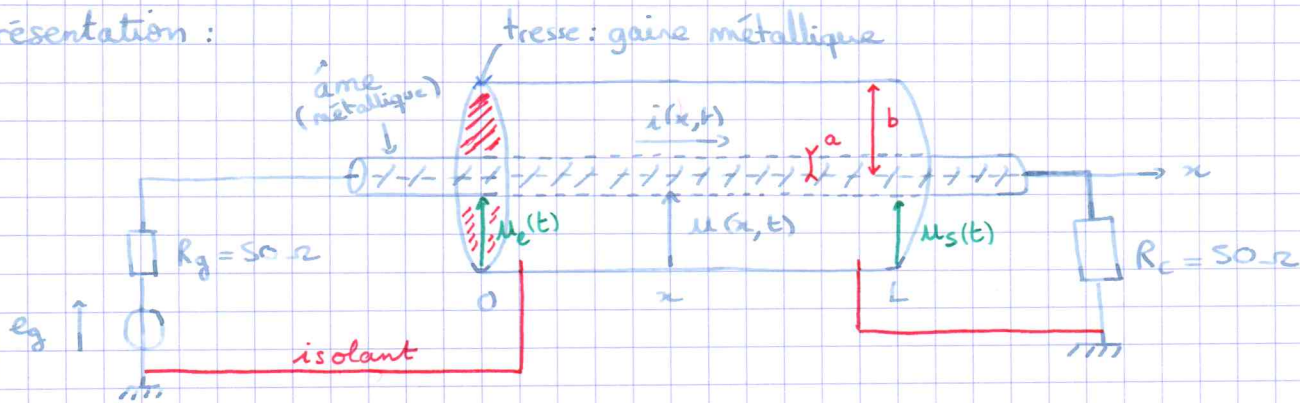
$$\mu \frac{\partial v_{\perp}}{\partial t} = \frac{\partial F_{\perp}}{\partial x}$$

$$F_{\perp}(x, t) \hat{=} T(x, t) \sin \alpha(x, t) \approx T_0 \alpha(x, t) \approx T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_{\perp}}{\partial t} = T_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} = T_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \Rightarrow \frac{\partial F_{\perp}}{\partial t} = T_0 \frac{\partial v_{\perp}}{\partial x}$$

## 2. Ondes de tension et de courant dans un câble coaxial sans pertes

(a) Présentation :



⊙ a priori : pas dans l'ARQS

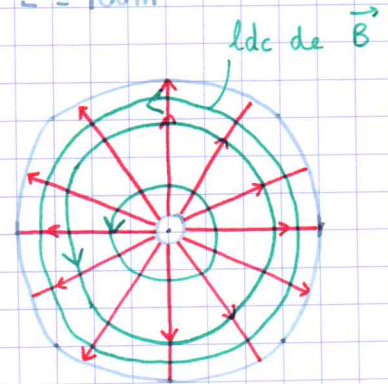
→ OF :  $f = 10 \text{ MHz}$      $\lambda = \frac{c}{f} = 30 \text{ m}$

↳ on serait dans l'ARQS si  $L \ll \lambda$

or  $L = 100 \text{ m}$

⇒  $i(x,t) \leftrightarrow$  champ  $\vec{E}$  orthoradial  
 $u(x,t) \leftrightarrow$  champ  $\vec{E}(r,t)$  radial de l'isolant  
 ⇕  
 comportements capacitifs

→ on néglige toute dissipation ohmique des conducteurs



(b) Modèle à constantes réparties

⊙ Caractéristiques du câble :

⊙ capacité linéique ( $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ )

$$\Gamma = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln(\frac{b}{a})} = 100 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$$

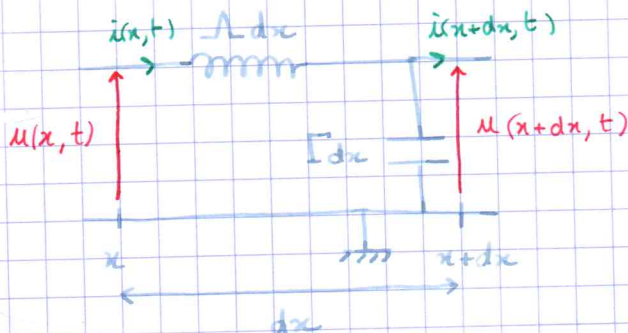
⊙ on déroule le câble en tranches de longueur  $dx \ll \lambda$  :

⊙ inductance linéique ( $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ )

$$\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(\frac{b}{a}) = 0,25 \text{ } \mu\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$$

•  $[x, x+dx]$  relève de l'ARQS

• lois de Kirschoff applicables à cette échelle



(c) Equations de couplage

⊙ Loi des mailles :

⊙ loi des nœuds :

$$u(x,t) = u(x+dx,t) + \Lambda dx \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$$i(x,t) = i(x+dx,t) + \Gamma dx \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x,t)$$

$$-dx \frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = +\Gamma dx \left[ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + dx \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$$

## (d) Equations de d'Alembert à 1D

$$\textcircled{1} \text{ sur } u(x, t): \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -\Lambda \frac{\partial}{\partial t} \left( -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{1}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

$$c^2 = \frac{1}{\Lambda \Gamma} = \frac{c_0^2}{\epsilon_r} \quad \rightarrow \quad c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \approx 2 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

② sur  $i(x, t)$ :

$$\text{de } \hat{m}: \quad \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x, t) \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$$

## II. Solutions progressives et stationnaires de l'équation de d'Alembert 1D

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad s(x, t) = \text{"signal"}$$

→ linéaire  $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \text{superp.} \\ \rightarrow \text{Fourier} \end{array} \right.$

→ invariante par renversement du temps ordre 2/t:  $\frac{\partial}{\partial(-t)^2} = \frac{\partial}{\partial t^2}$

### 1. Solution générale en ondes progressives

(a) Définition → variables  $\begin{cases} u = t - \frac{x}{c} \\ v = t + \frac{x}{c} \end{cases}$

• Euler: toutes les sol de d'A. 1D peuvent se mettre sous la forme  $s^+(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$

$$s^-(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

• Vérifions que  $s^+$  est solution:

$$\frac{\partial s^+}{\partial t} = f'(u) \times \frac{\partial u}{\partial t} = f'(u) \Rightarrow \frac{\partial^2 s^+}{\partial t^2} = f''(u)$$

$$\frac{\partial s^+}{\partial x} = f'(u) \times \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{f'(u)}{c} \Rightarrow \frac{\partial^2 s^+}{\partial x^2} = \left(-\frac{1}{c}\right)^2 f''(u)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 s^+}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 s^+}{\partial x^2} \quad : \quad s^+ \text{ est bien sol.}$$

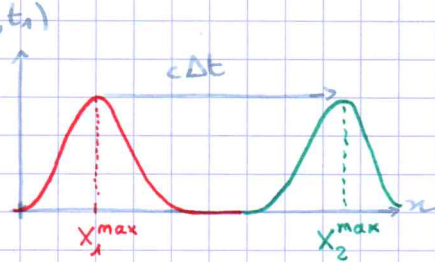
Généralisation: th. de superposition

⇒ toutes les sol. de d'Alembert 1D peuvent s'écrire sous la forme

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

## (b) Interprétation

• sens  $\varphi$  de  $f(t - \frac{x}{c})$



•  $\varphi$ : connaissant  $s(x, t_1)$ ,

trouver  $s(x, t_2)$   $t_2 = t_1 + \Delta t$

$$\begin{aligned} s(x, t_1 + \Delta t) &= f\left(t_1 + \Delta t - \frac{x}{c}\right) \\ &= f\left(t_1 - \frac{x - c\Delta t}{c}\right) \\ &= s(x - c\Delta t, t_1) \end{aligned}$$

p.ex: max: à  $t_1$ : en  $x_1^{\max}$   
- en  $t_2$ : en  $x_2^{\max}$   $t_2$

$$\begin{aligned} x_2^{\max} - c\Delta t &= x_1^{\max} \\ x_2^{\max} &= x_1^{\max} + c\Delta t \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  propagation sans déformation vers les  $x \uparrow$   
car  $c = cste$

$f(t - \frac{x}{c})$ : onde progressive  
(vers les  $x \uparrow$ )  
 $g(t + \frac{x}{c}) = g(t - \frac{x}{(-c)})$  vers  $x \downarrow$

## 2. Ondes progressives harmoniques

(a) Déf. en intérêt des OPH

• Déf: c'est une OP sinusoïdale de pulsation  $\omega$  (dépendance temporelle)

$$s^\pm(x, t) = S_0 \cos\left[\omega\left(t \pm \frac{x}{c}\right) + \varphi\right]$$

• Intérêt: disposer d'une famille de solutions élémentaires de d'A. 10.

$\rightarrow$  en effet:  $s^+(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos\left[\omega_n\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_n\right]$

ou  $s^+(x, t) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi(\omega)\right] d\omega$

• Non existence  $\varphi$  des OPH

$\rightarrow$  signal éternel

$\rightarrow$  "taille" du signal  $\infty \Rightarrow$  signal d'énergie  $\infty$

## (b) Double périodicité

• temporelle  $(T)$   $s(x, t+T) = s(x, t)$   $T = \frac{2\pi}{\omega}$   $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

• spatiale  $(\lambda)$   $s(x+\lambda, t) = s(x, t)$

$$\omega\left(t - \frac{x+\lambda}{c}\right) + \varphi = \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) - 2\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\omega\lambda}{c} = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = cT$$

(c) Vecteur d'onde:

• Déf:  $\vec{k} \hat{=} k \cdot \vec{u}$  où  $k \hat{=} \frac{2\pi}{\lambda}$  "pulsation spatiale"  $k = \frac{\omega}{c}$

$\uparrow$   
vecteur unitaire  
donnant dir<sup>+</sup> et sens de propa.

OPH:  $s^+(x,t) = S_0 \cos[\omega t - kx + \varphi]$   
 ou  $s^+(\vec{r},t) = S_0 \cos[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi]$

(d) Notation complexe

linéarité  $\Rightarrow$  not. complexe permise

$\underline{s}^+(x,t) = S_0 e^{j(\omega t - kx + \varphi)}$   
 $\underline{s}^+(x,t) = S_0 e^{j(\omega t - kx)}$  bref:  $\underline{s}^+(x,t) = e^{j(\omega t - kx)}$   
 $\underline{s}^-(x,t) = e^{j(\omega t + kx)}$

Derivation:  $e^{j\omega t}$

$\frac{\partial \underline{s}^+}{\partial t} = +j\omega \underline{s}^+$  et  $\frac{\partial \underline{s}^+}{\partial x} = -jk \underline{s}^+$

(e) Relation de dispersion  $\omega(k)$  ou  $k(\omega)$

$\underline{s}^+(x,t) = S_0 e^{j(\omega t - kx)}$

$\hookrightarrow$  (d'A. 1D)  $\rightarrow -\omega^2 \underline{s}^+ = c^2 \times (-k^2 \underline{s}^+)$   
 $\Rightarrow \omega^2 = c^2 k^2$  ou  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$  relation de dispersion

(f) Vitesse de phase  $v_p$

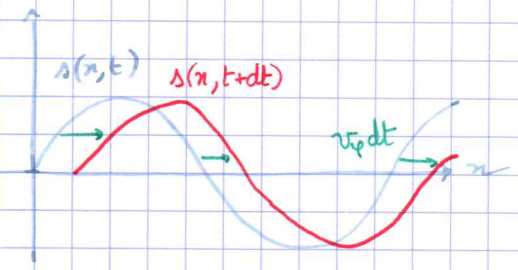
i.e.  $k = \pm \frac{\omega}{c}$

Phase de l'onde en  $(x,t)$

$\phi^+(x,t) = \omega t - kx + \varphi$

Q: à  $t+dt$ , en quel pt  $x+dx$  retrouve-t-on la valeur  $\phi^+(x,t)$ ?

$\phi^+(x+dx, t+dt) = \phi^+(x,t) \Rightarrow dx = \frac{\omega}{k} dt$   
 $\Rightarrow v_p \hat{=} \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$



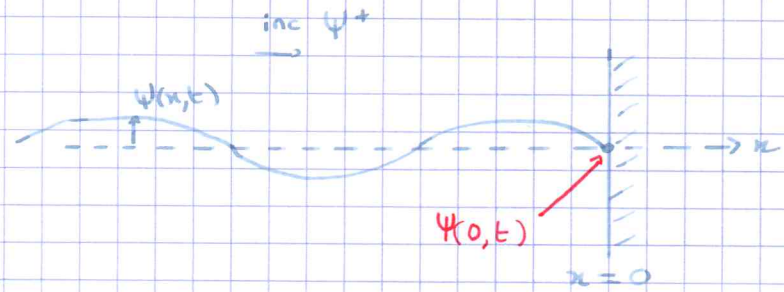
Corde vibrante et câble coax:

$v_p \hat{=} \frac{\omega}{k} = c$  constante, indép de  $\omega$ .

propagation non dispersif  
 $v_p$  indép de  $\omega$

3. Solutions en ondes stationnaires

(a) Construction d'une onde stationnaire par réflexion totale d'une OPH.



• Soit  $\lambda$  OPH provenant de  $-\infty$

$$\Psi^+(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$$

→ CL en  $x=0$  : ne peut être satisfaite avec  $\Psi^+$  seule,  $A \cos \omega t = 0$

• Création d'une onde réfléchie

$$\Psi^-(x,t) = B \cos(\omega t + kx + \varphi)$$

• Ond<sup>t</sup> aux limites en  $x=0$

$$\Psi(0,t) = \Psi^+(0,t) + \Psi^-(0,t) = A \cos \omega t + B \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \varphi &= 0 \\ B &= -A \end{aligned}$$

• onde totale 
$$\Psi(x,t) = A [\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)]$$
  

$$= -2A \sin(\omega t) \sin(-kx)$$

soit  $\Psi(x,t) = 2A \sin kx \sin \omega t$  → découplage de  $x$  et  $t$

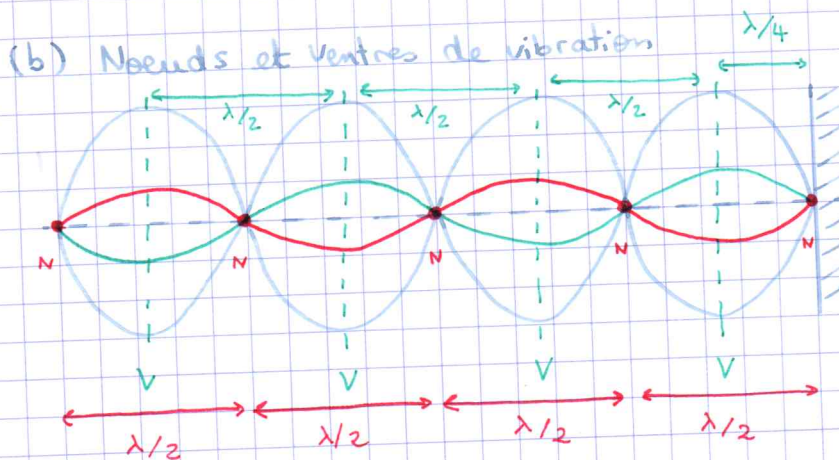
onde "stationnaire"  
harmonique

Déf: • onde stat: solution de l'éq de d'A

$$\underbrace{\Psi(x,t)}_{\text{en mot. réelle}} = f(x) \times g(t)$$

• onde stat harmonique: onde stat. dont la dépendance temporelle est sinusoidale.

$$\Psi(x,t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi)$$



• Nœuds d'amplitude

$$\sin kx_N = 0 \text{ i.e. } kx_N = n\pi$$

$$x_N = n \frac{\lambda}{2} \quad n \in \mathbb{N}$$

• Ventres d'amplitude

$$|\sin(kx_V)| = 1$$

$$\text{i.e. } kx_V = \frac{\pi}{2} + m\pi \text{ où } m \in \mathbb{N}$$

$$x_V = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$$

vibrations sur place sans propagation:

onde "stationnaire".

(c) Recherche des solutions stationnaires par séparation des variables

• On cherche  $\Psi(x,t) = f(x)g(t)$  en mot. réelle

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \Rightarrow f(x)g''(t) = c^2 f''(x)g(t)$$

$$\rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)} = \frac{K}{\text{conste}}$$

•  $K > 0$ :  $K \hat{=} k^2 > 0$       $f''(x) - k^2 f(x) = 0 \rightarrow f(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}$

CL:  $x=0$ :  $f(0) = 0 = A$

$\rightarrow$  sans intérêt

$\Rightarrow B = 0$

$x \rightarrow +\infty$   
 $x \rightarrow -\infty$

•  $K = 0$ :  $f''(x) = 0 \rightarrow f(x) = Ax + B$       $f(0) = 0 = B \rightarrow$  sans intérêt

$\downarrow$   
 $-\infty$  qd  $x \rightarrow -\infty$

•  $K < 0$ :  $K \hat{=} -k^2 > 0 < 0$

$\rightarrow f''(x) + k^2 f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = A \cos kx + B \sin kx$

CL:  $\psi(0, t) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 = A$

$\rightarrow f(x) = B \sin kx$

•  $\frac{g''(t)}{g(t)} = kc^2 = -k^2 c^2 \Rightarrow g''(t) + k^2 c^2 g(t) = 0$      Posons  $w = ck$

$g(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$

Conclusion:  $A(x, t) = S_0 \sin kx \cos(\omega t + \varphi)$

#### 4- Equivalence a priori des solutions

• La superposition de 2 OPH de  $\left( \begin{array}{l} \hat{m} \text{ puls. } \omega \\ \hat{m} \text{ amplitudes} \\ \text{sens de propa opposé} \end{array} \right) \Rightarrow$  OSH

• Réciproquement: Soit 1 OPH  $A(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$

superposition de 2 OSH

$= A \cos(\omega t + \varphi) \cos kx$

$+ A \sin(\omega t + \varphi) \sin kx$

de:  $\left\{ \begin{array}{l} \hat{m} \text{ puls} \\ \hat{m} \text{ ampli} \\ \text{déphasées de } \pm \frac{\pi}{2} \text{ ds l'espace et le ps} \end{array} \right.$

$\Downarrow$   
1 OPH

$\rightarrow$  choix des OPH ou des OSH: question de CL.

de manière générale:   
 • milieu  $\infty$ : plutôt OPH  
 • milieu borné: — OSH



### III - Conditions aux limites : modes propres et résonances d'une corde tendue

1. Régime libre : modes propres d'une corde tendue fixée à ses deux extrémités

(a) Modes propres = OSH compatibles avec les CL (en rég. libre)



→ en cherche des OSH compatibles avec les CL :  $\begin{cases} \Psi(0,t) = 0 \\ \Psi(L,t) = 0 \end{cases}$

$$\Psi(x,t) = C \cos(kx + \alpha) \cos(\omega t + \varphi)$$

NB:  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Psi$

CL 1:  $x=0$   $\Psi(0,t) = 0 = C \cos \alpha \cos(\omega t + \varphi) \forall t$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 \Psi$$

$\Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$   
arbitraire

$\hookrightarrow \Psi(x,t) = C \sin kx \cos(\omega t + \varphi)$

CL 2:  $x=L$  :  $\Psi(L,t) = 0 = C \sin kL \cos(\omega t + \varphi) \forall t$

$\Rightarrow \sin kL = 0$  i.e.  $kL = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^*$

$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad f_n = \frac{n c}{2L} = n f_1$

$\Rightarrow \Psi_n(x,t) = \underbrace{C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{A_n} \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t + \varphi_n\right)$  mode propre  $n$   
( $\neq$  fréquence!)

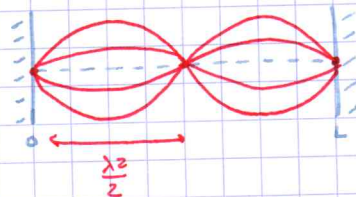
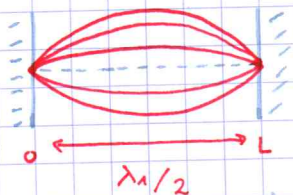
• Allure des 1<sup>er</sup> modes propres

$n=1$

$n=2$

$A_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \sin\left(2\pi \frac{x}{2L}\right)$

$A_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$



$\lambda_1 = 2L \Leftrightarrow L = \frac{\lambda_1}{2}$

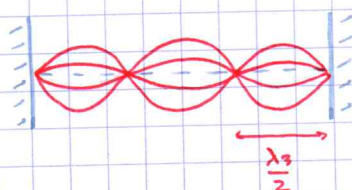
$\lambda_2 = L \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2}$

$f_1 = \frac{c}{2L}$

$f_2 = 2 \times \frac{c}{2L} = 2f_1$

$n=3$

$A_3(x) = \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) = \sin\left(2\pi \times \frac{x}{\frac{2}{3}L}\right)$

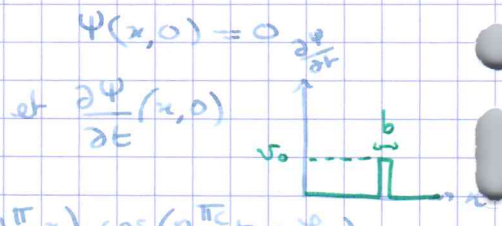


$\lambda_3 = \frac{2}{3}L = \frac{\lambda_1}{3}$

$f_3 = 3f_1$

(b) Construction d'une solution arbitraire de l'eq. de d'A 1D : rôle des CI

● Pb posé :  $t=0$   $\begin{cases} \Psi(x,0) = \alpha(x) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,0) = \beta(x) \end{cases} \forall x$  ex: corde de piano



Q: déterminer la sol. du pb  $\Psi(x,t)$  pour ces CI ?

(i) Superp. de modes propres:  $\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi_n\right)$  (CL)

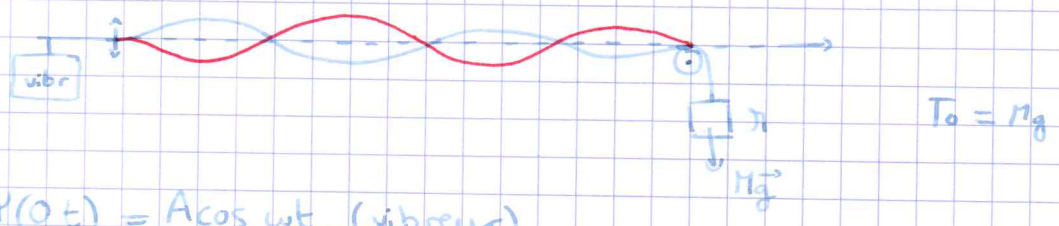
(ii) Exploitation des CI:  $\Psi(x,0) = \alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos \varphi_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,0) = \beta(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\pi c}{L} C_n \sin \varphi_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$   
 DSF de  $\beta(x)$

donné par le DSF de  $\alpha(x)$  rendue  $L$ -périodique

2 - Régime sinusoidal forcé : résonances de la corde de Helde

exp:



**RSF**  
 CL  $\begin{cases} \Psi(0,t) = A \cos \omega t \text{ (vibreux)} \\ \Psi(L,t) = 0 \end{cases}$

● Recherche des sol. stat. harmoniques en RSF  
 ↳ milieu borné

$\Psi(x,t) = B \cos(kx + \alpha) \cos(\omega t + \varphi)$   
 celui du vibreur (linéarité)

⚠ RSF → pas les mode propre  
 →  $\omega$  imposée par le vibreur

● CL:  $x=0$

$\Psi(0,t) = A \cos(\omega t) = B \cos \alpha \cos(\omega t + \varphi) \quad \forall t$   
 $\Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \text{ (ou } \pi) \\ B \cos \alpha = A \end{cases}$

$x=L$   $\Psi(L,t) = 0 = B \cos(kL + \alpha) \cos(\omega t) \quad \forall t$

donc  $kL + \alpha = n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi - kL$

$B = \frac{A}{\cos \alpha} = \frac{A}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - kL\right)} = \frac{(-1)^n A}{\sin kL}$

donc  $\Psi(x,t) = (-1)^n \frac{A}{\sin kL} \cos\left(kx + \frac{\pi}{2} + n\pi - kL\right) \cos(\omega t)$   
 $\frac{\cos\left(k(L-x) - n\pi - \frac{\pi}{2}\right)}{(-1)^n \sin(k(L-x))}$

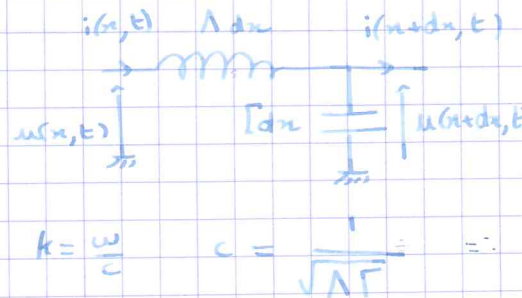
$$\Rightarrow \Psi(x,t) = A \frac{\sin\left(\frac{\omega}{c}(L-x)\right) \cdot \cos(\omega t)}{\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right)}$$

- on fait varier  $\omega$ : si  $\omega = \omega_n = n \frac{\pi c}{L}$ ,  $\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \sin\left(n\pi \frac{c}{c} \cdot \frac{L}{L}\right) = 0$
- $\Rightarrow$  résonances  $\omega$  et  $f_{rés} = f_{prop}$

#### IV - Impédance et phénomène de réflexion

##### 1 - Impédance / caractéristique / d'un câble coaxial parcouru par 1 onde prog. itérative

- hypo: câble parcouru par une OPH de tension constant



$$\underline{u}^+(x,t) = \underline{U}_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

$$\underline{i}^+(x,t) = \underline{I}_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

- Relation simple entre  $\underline{u}^+(x,t)$  et  $\underline{i}^+(x,t)$  ?

↳ eqs de couplage à l'ordre 1:  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$  (mailles)

$\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}$  (nœuds)

$$\frac{\partial \underline{u}^+}{\partial x} = -jk \underline{u}^+ = -\Lambda \frac{\partial \underline{i}^+}{\partial t} = -j\omega \Lambda \underline{i}^+$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{u}^+(x,t)}{\underline{i}^+(x,t)} = \frac{\omega}{k} \Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \hat{=} Z_c$$

→ réel > 0

→ indep de  $\omega$

→ numériquement:

$$Z_c = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-12}}} = 50 \Omega$$

$$\Lambda = 0,25 \mu\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\Gamma = 100 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$$

pour une OP non harmonique

$$\frac{u^+(x,t)}{i^+(x,t)} = Z_c$$

grandeurs réelles

- onde prog ( $x \searrow$ ):  $\underline{u}^-(x,t) = e^{j(\omega t + kx)}$
- $\underline{i}^-(x,t) = e^{j(\omega t + kx)}$

$$\frac{\partial \underline{u}^-}{\partial x} = +jk \underline{u}^- = -\Lambda \frac{\partial \underline{i}^-}{\partial t} = -\Lambda j\omega \underline{i}^-$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{u}^-}{\underline{i}^-} = -\frac{\omega}{k} \Lambda = -Z_c$$

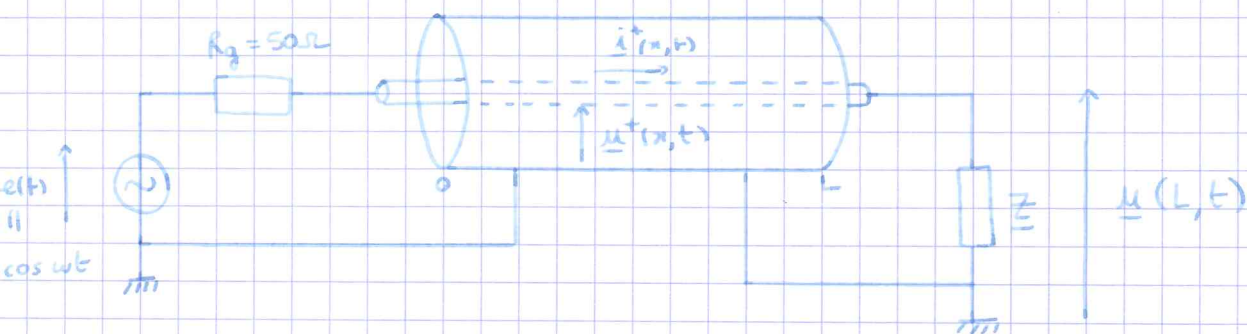
changement de signe

$$u\left(t - \frac{x}{c}\right) = Z_c i\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$u\left(t + \frac{x}{c}\right) = -Z_c i\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

⚠  $Z_c$  n'a de sens que pour une onde progressive (pas stationnaire)

## 2. Réflexion sur une impédance terminale



(a) Coeff<sup>t</sup> de réflexion pour l'amplitude de la tension

• Hypo: le GBF crée une OPH  $\begin{cases} u^+(x,t) = U_0^+ e^{j(\omega t - kx)} \\ i^+(x,t) = \frac{U_0^+}{Z_c} e^{j(\omega t - kx)} \end{cases}$

• CL en  $x=L$ :  $u(L,t) = Z i(L,t)$  or  $u^+(L,t) = Z_c i^+(L,t)$

(comme  $Z \neq Z_c$ ,  $u(x,t) \neq u^+(x,t)$ )

→ nécessité d'une onde réfléchie  $\begin{cases} u^-(x,t) = U_0^- e^{j(\omega t + kx)} \\ i^-(x,t) = -\frac{U_0^-}{Z_c} e^{j(\omega t + kx)} \end{cases}$

• onde totale:

$$\begin{cases} u(x,t) = u^+(x,t) + u^-(x,t) \\ i(x,t) = i^+(x,t) + i^-(x,t) = \frac{1}{Z_c} [u^+(x,t) - u^-(x,t)] \end{cases}$$

pas une OP  $\Rightarrow u \neq Z_c i$

• Coefficient de réflexion en tension

$$\Gamma_u \hat{=} \frac{u^-(L,t)}{u^+(L,t)}$$

$$u(L,t) = u^+(L,t) + u^-(L,t) = Z i(L,t)$$

$$i(L,t) = \frac{1}{Z_c} [u^+(L,t) - u^-(L,t)]$$

$$\Rightarrow Z = Z_c \cdot \frac{u^+ + u^-}{u^+ - u^-} = Z_c \frac{1 + \Gamma_u}{1 - \Gamma_u}$$

$$\Gamma_u = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c}$$

NB: pour  $\Gamma_i \hat{=} \frac{i^-(L,t)}{i^+(L,t)} = -\Gamma_u$

(b) Discussion

• Impédance adaptée:  $Z = Z_c = 50 \Omega$

$\Gamma_u = 0$ : l'onde incidente est totalement absorbée par la charge  
→ aucune réflexion

③ Court-circuit :  $\underline{Z} = 0$   $r_v = -1$

$$\underline{u}^-(L, t) = -\underline{u}^+(L, t)$$

réflexion totale avec changement de signe  $\underline{u}(L, t) = 0$

④ Circuit ouvert :  $\underline{Z} = \infty$

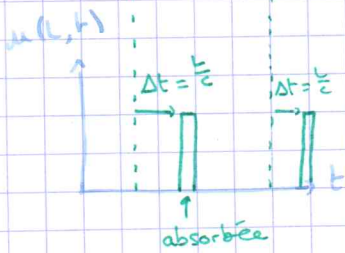
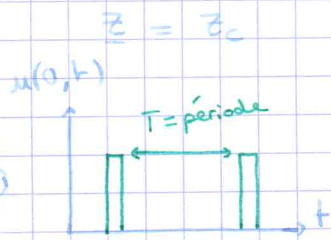
$r_v = 1$  : réflexion totale sans changement de signe

$$\underline{u}^-(L, t) = \underline{u}^+(L, t)$$

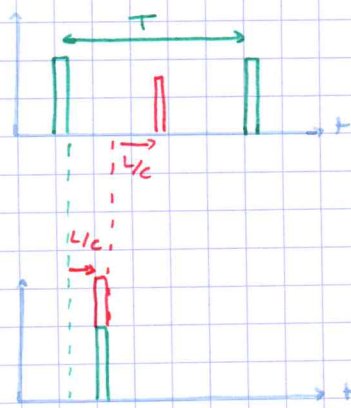
$$-Z_c \underline{i}^-(L, t) = +Z_c \underline{i}^+(L, t)$$

$$\Rightarrow \underline{i}(L, t) = \underline{i}^+ + \underline{i}^- = 0 \text{ circuit ouvert.}$$

(c) Réflexion et propagation d'une impulsion de tension



circ. ouvert



court circuit

