

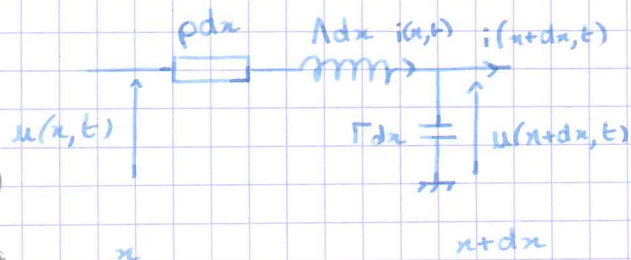
PO2: PHENOMENES DE PROPAGATION LINEAIRE 1D

DISPERSION ET ATTENUATION

I - Dispersion / atténuation

1. EDP linéaire : ex. du câble résistif.

→ tranches $[x, x+dx]$: $dx \ll L$ et $dx \ll \lambda$ (et $L \gg \lambda$)
 ↳ câble pas ds l'ARQS
 ↳ tranche dans l'ARQS



$p =$ résistance / unité de longueur ($\Omega \cdot m^{-1}$)
 ↳ traduit la dissip. Joule ds les conducteurs (âme)

⊙ Éq. de couplage

→ loi des mailles : $u(x,t) = u(x+dx,t) + p dx i(x,t) + \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}(x,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -p i(x,t) - \Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x,t)$$

→ loi des nœuds : $i(x+dx,t) = i(x,t) - \Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$$

⊙ EDP linéaire (Éq. de propa)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -p \frac{\partial i}{\partial x} - \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = +p \Gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \Lambda \frac{\partial}{\partial t} \left(-\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

$$\text{donc } \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p \Gamma \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$$

2. Solution générique en OPH*

⊙ Linéarité \Rightarrow notation complexe en RSF } \rightarrow Fourier
 th de superposition

⊙ EDP ressemble à d'A. 1D.

\Rightarrow on cherche des solutions $\underline{u}(x,t) \propto e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ où $\underline{k} = k' + jk'' \in \mathbb{C}$ a priori

3. Relation de dispersion des OPH*

on réinjecte ds l'EDP : $-\omega^2 \underline{u}(x,t) + \frac{p}{\Lambda} j \omega \underline{u}(x,t) = c^2 (-jk'')^2 \underline{u}(x,t)$

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j \frac{p}{\Lambda c^2} \omega = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - j \frac{p}{\Lambda \omega} \right) \Rightarrow \underline{k} \text{ est complexe.}$$

4. Sens φ de k' et k'' : dispersion et atténuation

(a) Dispersion et atténuation $\underline{k} = k' + jk''$

• Solution en OPM*: $\underline{u}(x,t) = U_0 e^{j(\omega t - (k' + jk'')x)}$

$$\underline{u}(x,t) = U_0 e^{k''x} e^{j(\omega t - k'x)}$$

$$\rightarrow u(x,t) = U_0 e^{k''x} \cos(\omega t - k'x)$$

(i) Propagation de la phase

$$\cos(\omega t - k'x) = \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{\frac{\omega}{k'}}\right)\right]$$

$$v_p(\omega) = \frac{\omega}{k'}$$

a priori, v_p dépend de ω :
il y a dispersion

k' : phénomène de propagation
signe de k' donne le sens de propa

(ii) Atténuation: $e^{k''x} \rightarrow$ si $k' > 0$: propa vers $x \uparrow$
 $\Rightarrow k'' < 0$

Distance d'atténuation: $\delta \hat{=} \left| \frac{1}{k''} \right|$

Pour $k' > 0$, $u(x,t) = U_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - k'x)$

(b) Comportement du câble résistif à l'ordre 1 $\rho \ll \Lambda \omega$

$$\underline{k} = \frac{\omega}{c} \left(1 - j \frac{\rho}{2\Lambda\omega} \right) \text{ à l'ordre 1}$$

hypo: $k' > 0$

• $k'(\omega) = \frac{\omega}{c}$ i.e. $v_p = \frac{\omega}{k'} = c = \text{cte}$ indép de ω .

\rightarrow à l'ordre 1: pas de dispersion.

• $k''(\omega) = -\frac{\rho}{2\Lambda c} = -\frac{\rho}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} = \frac{-\rho}{2Z_c}$

et $\delta(\omega) = \frac{2Z_c}{\rho}$ car $\alpha = \frac{1}{\delta}$

Concl: à l'ordre 1: $u(x,t) = U_0 e^{-\frac{\rho x}{2Z_c}} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$

(c) Comportement du câble résistif à l'ordre 2

$$\underline{k} = \pm \frac{\omega}{c} \left(1 - j \frac{\rho}{\Lambda\omega} \right)^{1/2}$$

$$\underline{k} = \frac{\omega}{c} \left[1 - j \frac{\rho}{2\Lambda\omega} - \frac{1}{8} \left(-\frac{\rho^2}{\Lambda^2\omega^2} \right) \right] = \frac{\omega}{c} \left[\left(1 + \frac{\rho^2}{8\Lambda^2\omega^2} \right) - j \frac{\rho}{2\Lambda\omega} \right]$$

• $k'(\omega) = \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{\rho^2}{8\Lambda^2\omega^2} \right) \rightarrow$ dispersion: k' n'est pas prop à ω

$$v_p(\omega) = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{1 + \frac{p^2}{8N^2\omega^2}} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} c$$

dispersion

• $k''(\omega) = -\frac{p}{2Z_0}$: non modifié : atténuation indép de ω .

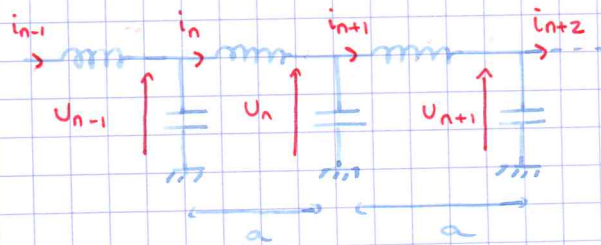
cond : $u(x,t) = U_0 e^{-\frac{px}{2Z_0}} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v_{gr}(\omega)}\right)\right)$

II - Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif non atténuant

vitesse de groupe

1. Ex de milieu dispersif non atténuant : ligne LC ∞ , discrète, idéale

Systeme discret



⊗ Eq de propa discrète

→ loi des mailles : $u_{n+1} = u_n + L \frac{di_n}{dt}$

→ loi des nœuds : $i_{n+1} = i_n - C \frac{du_n}{dt}$

→ Eq. de propa de la tension discrète

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{1}{L} \left[-\frac{di_{n+1}}{dt} + \frac{di_n}{dt} \right] = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{C} (u_{n+1} - u_n) - \frac{1}{C} (u_n - u_{n-1}) \right]$$

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \omega_0^2 [u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n]$$

⊗ Onde de tension / prog / discrète $u_n(t) = U e^{j(\omega t - kx_n)} = U e^{j(\omega t - kna)}$

harm | $x_n = na$ $k \in \mathbb{R}$

⊗ rel. de dispersion : $-\omega^2 u_n = \omega_0^2 [e^{-jka} + e^{jka} - 2] u_n$

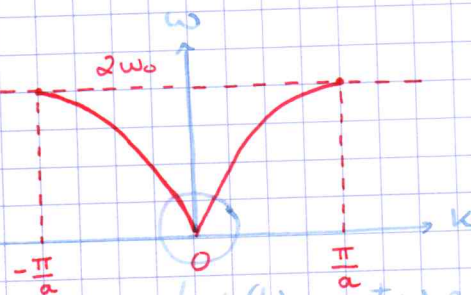
$$\omega^2 = \omega_0^2 (2 - e^{jka} - e^{-jka}) = 2\omega_0^2 (1 - \cos ka) = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

→ $\omega(k) = 2\omega_0 \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$

i.e. $\omega(k) = 2\omega_0 \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$

comportement passe bas

→ les OPH^x qui peuvent se propager

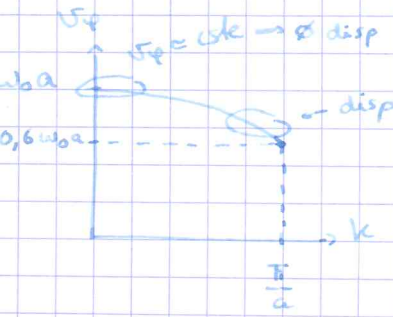


$\omega(k) = \frac{\pi}{a} \pm \omega_0 a k$

$v_p = \frac{\omega}{k} = \pm \omega_0 a = cte$

• Vitesse de phase :

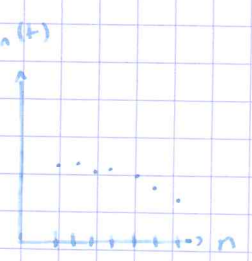
$$k) 0 \quad v_{\text{ph}} \hat{=} \frac{\omega}{k} = \omega_0 a \times \left(\frac{\sin(\frac{ka}{2})}{\frac{ka}{2}} \right)$$



$$\frac{2}{\pi} \omega_0 a \approx \frac{2}{3} \omega_0 a \approx 0,6 \omega_0 a$$

• Interprétation de la zone non dispersive : approximation continue

$k \ll \frac{\pi}{a}$ or $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ donc $\lambda \gg a$ i.e. $\lambda \gg a$: var. spatiales se font sur une échelle $\gg a$



$$\Rightarrow \begin{cases} u_{n+1}(t) \approx u_n(t) \\ u_{n-1}(t) \approx u_n(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t) &= u((n+1)a, t) \\ &= u(na, t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(na, t) \\ &\quad + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(na, t) \end{aligned}$$

$$u_n(t) \rightarrow u(x, t)$$

$$\text{où } u(x=na, t) = u_n(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega_0^2 \left[u + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega_0^2 a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{d'Alembert 1D} \quad \text{si } \lambda \gg a \text{ i.e. } k \ll \frac{\pi}{a}$$

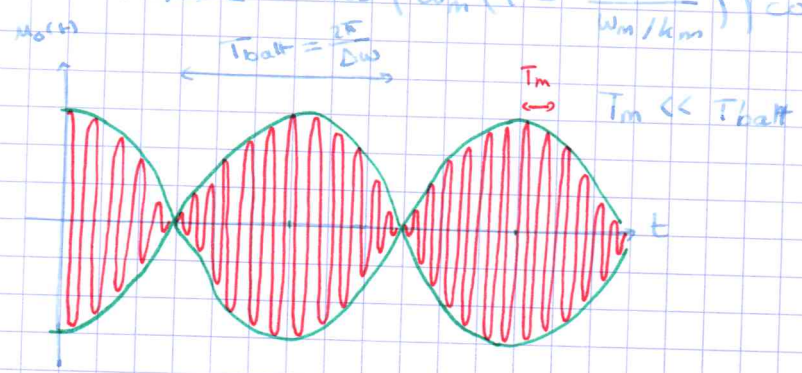
Concl : le caractère dispersif de la ligne est dû à son caractère discret

2 - Première approche : superposition de 2 OPH de fréq. voisines - Battements - Vitese de propa de l'enveloppe

• Description "continue" : $u_n(t) = u(x, t)$

→ 2 OPH de puls. ω_1
 $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$, $\Delta\omega \ll \omega_1$ de même amplitude

$$\begin{aligned} u_n(t) = u(x, t) &= U \cos(\omega_1 t - k_1 x) + U \cos(\omega_2 t - k_2 x) \\ &= 2U \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t - \frac{k_2 - k_1}{2} x\right) \\ u(x, t) &= 2U \cos\left(\omega_m \left(t - \frac{x}{v_m/k_m}\right)\right) \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \left(t - \frac{x}{\Delta\omega/\Delta k}\right)\right) \end{aligned}$$



→ début de localisation du signal entre les nœuds

$$\hookrightarrow \Delta t = T_{\text{batt}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \Rightarrow \Delta t \Delta\omega = 2\pi$$

⊗ Vitesse de phase (moyenne): $v_p(\omega_m) = \frac{\omega_m}{k_m}$

⊗ Vitesse de propa de l'enveloppe: $v_{\text{env}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$

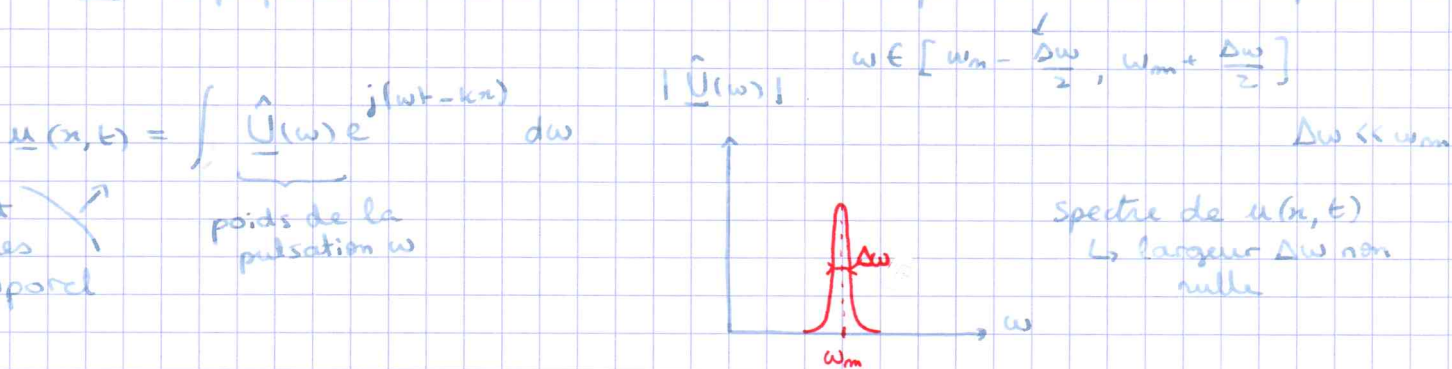
de manière équivalente:

$$u(x,t) = 2U \cos\left(k_m \left(x - \frac{\omega_m}{k_m} t\right)\right) \cos\left(\frac{\Delta k}{2} \left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k} t\right)\right)$$

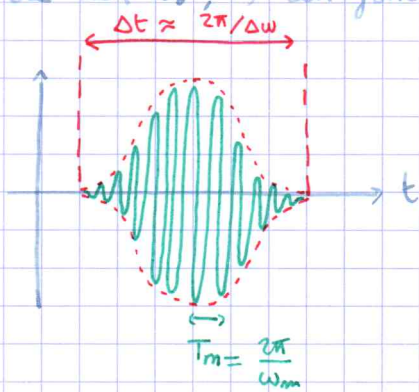
3. Définition d'un paquet d'onde - Lien avec la TF

→ But: signal limité dans le temps / l'espace

Sol: superposer une série continue d'OPI de puls. ω voisines d'un puls ω_m



Allure de $u(x_0, t)$ en fonction de t

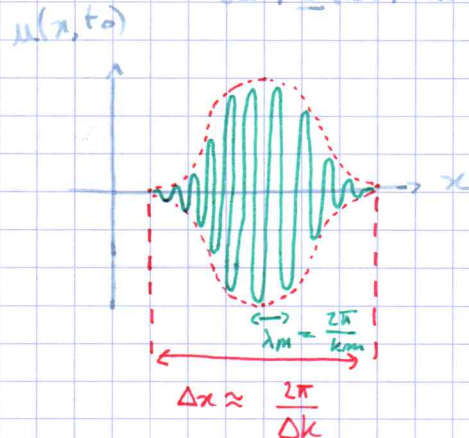
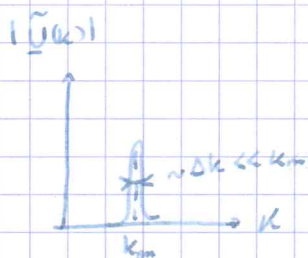


$\Delta\omega \Delta t \approx 2\pi$ propriété de la TF.

⊗ Paquet d'ondes spatial:

$$u(x,t) = \int \hat{U}(k) e^{j(\omega t - kx)} dk$$

où $|\hat{U}(k)|$ non négligeable dans $\left[k_m - \frac{\Delta k}{2}, k_m + \frac{\Delta k}{2}\right]$



$\Delta x \Delta k \approx 2\pi$

P.O.: signal localisé spatialement et temporellement

4. Propagation d'un PO dans un milieu dispersif non atténuant - Vitesse de groupe

(a) Cas d'un milieu non dispersif

→ cf. simul: le PO se propage à vitesse cste, ss déformation

$$\Rightarrow v_w, v_g(w) = \text{cste} = c$$

$$\Rightarrow v_{\text{env}} \hat{=} v_g = c$$

(b) Cas d'un milieu dispersif: $v_g = \frac{\omega}{k} \neq \text{cste}$.

→ propagation avec déformation et élargissement du signal

→ v_g dépend de k .

$$\Rightarrow v_{\text{env}} \hat{=} v_g \neq v_p(\omega_m)$$

② Calcul de vitesse de groupe

→ milieu caractérisé par $w(k) = 2w_0 \sin \frac{ka}{2}$

$$k = k_m + (k - k_m)$$

$$w(k) = w(k_m) + (k - k_m) \frac{dw}{dk}(k_m)$$

$$\left. \begin{array}{l} w(k) = w(k_m) + (k - k_m) \frac{dw}{dk}(k_m) \\ k = k_m + (k - k_m) \end{array} \right\} \omega t - kx = \left(\omega_m + (k - k_m) \frac{d\omega}{dk}(k_m) \right) t - (k_m + (k - k_m))x$$

$$= (\omega_m t - k_m x) + (k - k_m) \left[\frac{d\omega}{dk}(k_m) t - x \right]$$

$$\text{donc } \underline{u}(x, t) = \int \underline{\tilde{U}}(k) e^{j(\omega t - kx)} dk$$

$$= \underbrace{e^{j(\omega_m t - k_m x)}}_{\text{OPH moyenne}} \times \underbrace{\int \underline{\tilde{U}}(k) e^{j(k - k_m) \left[\frac{d\omega}{dk}(k_m) t - x \right]} dk}_{F\left(\frac{d\omega}{dk}(k_m) t - x\right)}$$

$$F\left(\frac{d\omega}{dk}(k_m) t - x\right)$$

enveloppe

$$\text{Déf: } v_g(k_m) \hat{=} \frac{d\omega}{dk}(k_m)$$

→ vitesse de propa de l'env.

→ vitesse de propa de l'info
l'énergie

→ NB1: Battements = $v_{\text{env}} = \frac{d\omega}{dk}$ cohérent avec $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

→ NB2: Ce calcul (fondé sur DL de la RD à l'ordre 1), ne prévoit aucune déformation de l'enveloppe.

→ NB3: Si milieu atténuant: $\underline{k} = k' + jk''$

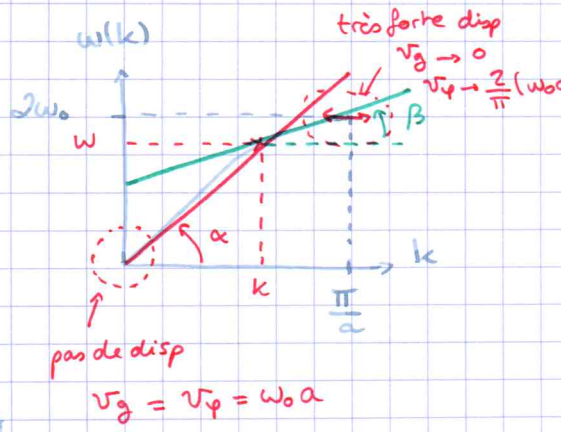
$$\rightarrow v_g \hat{=} \frac{\omega}{k'} \quad \rightarrow v_g \hat{=} \frac{d\omega}{dk'}$$

5. Retour sur la ligne LC discrète

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{ka}{2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega = 2\omega_0 \sin \frac{ka}{2} \quad (k > 0)$$



$$\begin{cases} \tan \alpha = v_p \\ \tan \beta = v_g \end{cases}$$

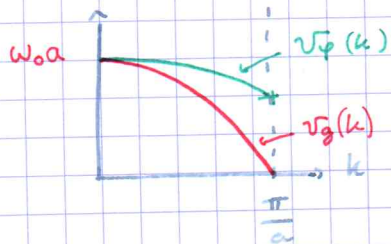
Calcul de $v_g(\omega)$

→ ce qu'il ne faut pas faire : calculer explicitement $\frac{d\omega}{dk}$

→ au contraire : partir de $\omega^2(k) =$

$$2\omega d\omega = 4\omega_0^2 \cdot 2 \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \cos\left(\frac{ka}{2}\right) \frac{a}{2} dk$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{2\omega_0^2}{\omega} \cos \frac{ka}{2} \sin \frac{ka}{2} \times a \\ &= \omega_0 a \cos\left(\frac{ka}{2}\right) \end{aligned}$$



III - Ondes thermiques dans le sous-sol

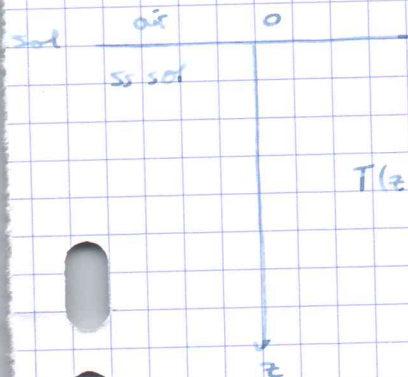
1. Modèle d'étude des fluctuations de température dans le sol

Q: en surface : fluctuat° de température [journalières (jour/nuit)
saisonniers (été/hiver)]
↳ répression en profondeur?

Modèle : → sol = milieu continu, semi-infini "plat"

$$\begin{cases} \lambda = 0,9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ C = 0,9 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} \\ \mu = 2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \end{cases}$$

$$D = \frac{\lambda}{\mu C} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$



$T(z,t)$

→ CL : $T(0,t) = T_0 + \theta_m \cos \omega t$

⊙ jour/nuit (en hiver)

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$T_0 = 5^\circ\text{C} = 278 \text{ K} \quad \theta_m = 10 \text{ K}$

⊙ hiver/été $\omega = \frac{2\pi}{365 \times 86400} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$T_0 = 15^\circ\text{C} = 288 \text{ K}$

$\theta_m = 10^\circ\text{C} = 10 \text{ K}$

③ Phénomène piloté par l'Eq de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

on pose $T(z,t) = T_0 + \theta(z,t)$

④ Linéarité + C.L. sinus \Rightarrow en RSF : OPH \Rightarrow

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

$$\theta(z,t) \propto e^{j(\omega t - kz)}$$

$k \in \mathbb{C}$ a priori

avec $\omega = \omega_j$ ou ω_s

2. Relation de dispersion et solution du problème

④ Rel. de dispersion

$$j\omega \theta = D (-jk)^2 \theta \quad \text{i.e.} \quad \underline{k}^2 = -j \frac{\omega}{D} = e^{j\frac{\pi}{4}} \frac{\omega}{D}$$

$$\underline{k} = \pm e^{-j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\omega}{D}} = \pm (1-j) \sqrt{\frac{\omega}{2D}} \quad \text{posons} \quad \delta(\omega) \hat{=} \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$$

$$\underline{k} = \pm \frac{1-j}{\delta}$$

④ Solution du pb

$$\rightarrow \theta(z,t) = e^{j\omega t} \left[A e^{-j\left[\frac{1-j}{\delta}\right]z} + B e^{-j\left[-\frac{1-j}{\delta}\right]z} \right]$$

$$\theta(z,t) = A e^{-z/\delta} e^{j(\omega t - z/\delta)} + B e^{z/\delta} e^{j(\omega t + z/\delta)}$$

C.L. • en $z = +\infty$ $|\theta|$ fini + sol "régrenire" n'a pas de sens \forall

$$B = 0$$

• en $z = 0$ $\theta(0,t) = \theta_m \cos \omega t \Rightarrow \theta(0,t) = \theta_m e^{j\omega t}$

$$\Rightarrow A = \theta_m$$

Cond: $\theta(z,t) = \theta_m e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta)$

$$\Rightarrow T(z,t) = T_0 + \theta_m e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$$

3. Effet de peau thermique : [profondeur de pénétration retard de propagation]

$$\theta(x,t) = \theta_m e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta) \quad \delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$$

● Facteur d'atténuation $e^{-x/\delta}$

δ = distance carac. d'atténuation de la fluctuation de T

$$= \left| \begin{array}{l} \text{profondeur} \\ \text{épaisseur} \end{array} \right| \text{ de peau} \quad \delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

NB: $\delta \neq \sqrt{D \cdot \tau}$ i.e. $\tau \neq \frac{\delta^2}{D}$

● facteur de propa: $\cos(\omega t - \frac{z}{\delta}) = \cos(\omega(t - \frac{z}{\omega\delta}))$

$$v_y = \omega\delta = \sqrt{2D\omega}$$

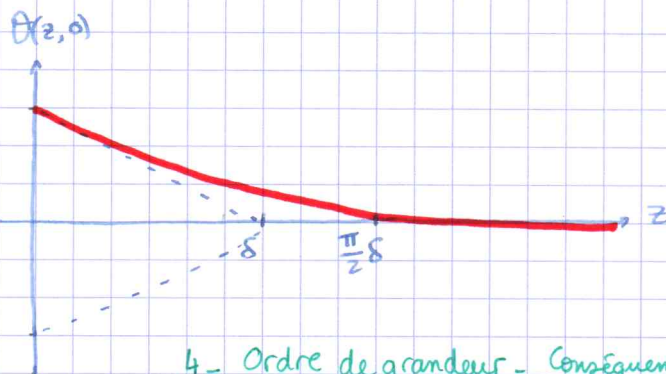
→ à la profondeur z : retard dû à la propa: $\Delta t = \frac{z}{\omega\delta} = \frac{z}{\sqrt{2D\omega}} \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$

● Allure de θ en fonction de z (à t_0 fixé):

$$t_0 = 0: \theta(z,0) = \theta_m e^{-z/\delta} \cos(\frac{z}{\delta})$$

→ s'annule la 1^{re} fois

$$\frac{z}{\delta} = \frac{\pi}{2} \text{ i.e. } z = \frac{\pi}{2}\delta \approx 1,5\delta$$



4. Ordre de grandeur - Conséquences pratiques

OG:

	Fluc. journ.	Fluc. saison.
ω (rad/s)	$7 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-7}$
δ (m)	0,11	2,0
Prof $z_0 + \eta$ $\Delta\theta = \pm 1K$	25 cm	4,6 m
$\Delta t(z_0)$	$\approx 9h$	133j $\approx 4,5$ mois

● Conséquences

→ enterrément des canalisations d'eau: qq. 10 cm à 1 m.

→ profondeur d'une bonne cave: qq m.

