

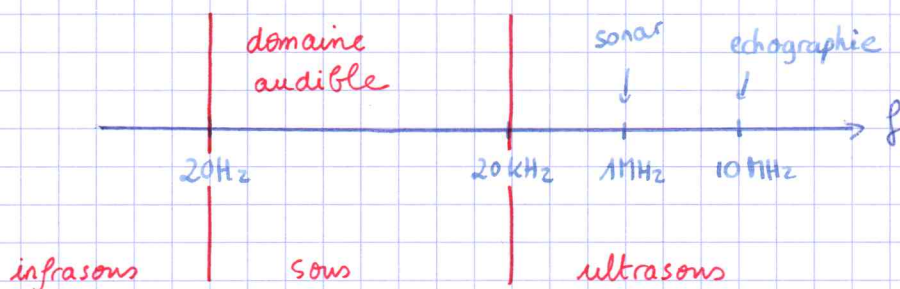
# P03: ONDES SONORES DANS LES FLUIDES

onde sonore = onde mécanique se propageant de proche en proche dans un milieu (solide ou fluide)  
| acoustique

- Succession de compressions / décompressions du fluide  $\Rightarrow$  mise en vibration LOCALE du fluide
- mvmts locaux du fluide // dir. de propa: onde LONGITUDINALE

## I - Equation de d'Alembert 3D

### 1 - Spectre sonore et ultrasonore



### 2 - Grandeurs décrivant une onde sonore

(a) les 3 grandeurs acoustiques: pression, masse vol., champ de vitesses

$$P(\vec{r}, t) \quad \mu(\vec{r}, t) \quad \vec{v}(\vec{r}, t)$$

→ ss onde: repos  $\left. \begin{array}{l} P_0 \\ \mu_0 \\ \vec{v}_0 = \vec{0} \end{array} \right\} \text{ uniformes}$

→ avec onde: perturbation de l'état de repos:

$$P(\vec{r}, t) = P_0 + P_1(\vec{r}, t) \quad \langle P_1(\vec{r}, t) \rangle_{t_{ps}} = 0$$

$$\mu(\vec{r}, t) = \mu_0 + \mu_1(\vec{r}, t) \quad \langle \mu_1(\vec{r}, t) \rangle_{t_{ps}} = 0$$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{0} + \vec{v}_1(\vec{r}, t) \quad \langle \vec{v}_1(\vec{r}, t) \rangle_{t_{ps}} = \vec{0}$$

alg.

(b) Approx. acoustique

⊗ cf. justification numérique:

$$|P_1| \ll P_0$$

$$|\mu_1| \ll \mu_0$$

$$\|\vec{v}_1\| \ll c_s \leftarrow \text{célérité du son}$$

mais écoulement / compressible  
instationnaire

① approximation acoustique

→ on linéarise toutes les éq de couplage liant  $P_i(\vec{r}, t)$ ,  $\mu_i(\vec{r}, t)$  et  $\vec{v}_i(\vec{r}, t)$  termes d'ordres 1 en  $P_i$ ,  $\mu_i$ ,  $\vec{v}_i$

(c) Hypothèses fondamentales supplémentaires :

② écoulement associé à l'onde PARFAIT

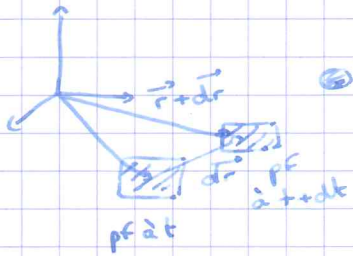
3 - Les 3 équations locales linéarisées

(a) Loi de la qte de mouvement linéarisée

→ Soit 1 pf de masse  $S m$  de vol  $S V$

$$\text{PFD} \quad S m \vec{a} = - \overrightarrow{\text{grad}} P \cdot S V$$

$$= - \overrightarrow{\text{grad}} P_1 \cdot S V$$



③ Accélération de la pf.

$$\vec{a} = \lim_{dt \rightarrow 0} \left( \frac{\vec{v}_1(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) - \vec{v}_1(\vec{r}, t)}{dt} \right)$$

→ plaçons nous à 1D :  $\vec{v}_1(x, t) = v_1(x, t) \vec{u}_x$

$$a = \frac{v_1(x + dx, t + dt) - v_1(x, t)}{dt}$$

$$= \frac{v_1(x + dx, t + dt) - v_1(x, t + dt)}{dt} + \frac{v_1(x, t + dt) - v_1(x, t)}{dt}$$

$$a = dx \frac{\partial v_1}{\partial x} (x, t + dt) + \frac{\partial v_1}{\partial t} (x, t)$$

$\delta$ : dép local sur  $\tau$

$$a = \frac{dx}{dt} \times \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial t} \quad \# \quad \left| \frac{\partial v_1}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} \right| \quad \# \quad \frac{\delta}{\lambda} \quad \# \quad \frac{v_1 \tau}{\lambda} = \frac{v_1}{c} \ll 1$$

$\tau$                        $\# \frac{v_1}{\lambda}$                        $\# \frac{v_1}{\tau}$                        $\left| \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|$

Conclusion: approx acoustique :  $v_1 \ll c \Rightarrow \delta \ll \lambda$  et  $\vec{a} \approx \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$   
 → on a linéarisé l'accélération

④ éq du mouvement linéarisée

$$S m \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{grad}} P_1 \cdot S V$$

$$(\mu_0 + \mu_1) \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{grad}} P_1$$

$$\underbrace{\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{\mu_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}}_{\text{ordre 2}} = \underbrace{- \overrightarrow{\text{grad}} P_1}_{\text{ordre 1}} \Rightarrow \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{grad}} P_1$$



## (b) Equation de continuité linéarisée

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \mu_0}{\partial t} + \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \operatorname{div}((\mu_0 + \mu_1) \vec{v}_1) = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial \mu_1}{\partial t}}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{\mu_0 \operatorname{div}(\vec{v}_1)}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{\operatorname{div}(\mu_1 \vec{v}_1)}_{\text{ordre 2}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \operatorname{div}(\vec{v}_1) = 0} \quad \text{équation de continuité linéarisée}$$

NB:  $\operatorname{div} \vec{v}_1 \neq 0$  :  $\vec{e}^t$  compressible et  $\vec{e}^t$  instationnaire pourtant  $\|\vec{v}_1\| \ll c$   
 $\frac{\partial \mu_1}{\partial t} \neq 0$

## (c) Equation d'évolution isentropique linéarisée

$$\bullet P = P_0 + P_1 \quad |P_1| \ll P_0$$

$$\mu(P) = \underbrace{\mu(P_0)}_{\mu_0} + \underbrace{(P - P_0)}_{P_1} \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_s + o(P_1) \quad (\text{développement de Taylor})$$

• Coefficient de réponse thermique :

$$\chi_s \hat{=} \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_s \quad \text{compressibilité isentropique (Pa}^{-1}\text{)}.$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_s (P_0) = \mu_0 \chi_s \Rightarrow \mu(P) = \mu_0 + \mu_0 \chi_s P_1 = \mu_0 + \mu_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_1 = \mu_0 \chi_s P_1} \quad \text{équation d'évolution isentropique linéarisée}$$

4 - les deux équations de couplage linéaires liant  $P_1$  et  $\vec{v}_1$

$$\bullet \text{PFD linéarisé} \quad \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\operatorname{grad} P_1 \quad (1)$$

$$\bullet \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mu_1 = \mu_0 \chi_s P_1 \Rightarrow \chi_s \frac{\partial P_1}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0$$

→ double couplage spatio-temporel linéaire de  $P_1$  et  $\vec{v}_1$

## 5- Equation de d'Alembert 1D pour la surpression

• Hypo: 1D (tuyau sonore d'axe  $Ox$ ):  $P_i(x,t)$  et  $\vec{v}_i = v_i(x,t) \cdot \vec{u}_x$

• 2 eq<sup>s</sup> de couplage: 
$$\begin{cases} \mu_0 \frac{\partial v_i}{\partial t}(x,t) = - \frac{\partial P_i}{\partial x}(x,t) \\ \chi_s \frac{\partial P_i}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 P_i}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \chi_s} \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 P_i}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$$

## 6- Equation de d'Alembert 3D pour $P_i$

$$\begin{cases} \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = - \vec{\text{grad}} P_i \\ \chi_s \frac{\partial P_i}{\partial t} = - \text{div} \vec{v}_i \end{cases} \Rightarrow \chi_s \frac{\partial^2 P_i}{\partial t^2} = - \text{div} \left( \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} \right) = \frac{1}{\mu_0} \text{div} (\vec{\text{grad}} P_i)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 P_i}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \chi_s} \Delta P_i = c^2 \Delta P_i$$

## 7- Célérité du son dans les fluides: ordres de grandeur

• Liquides eau:  $\begin{cases} \mu_0 = 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ \chi_s = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1} \end{cases} \quad c = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 10^{-8}}} = 1410 \text{ m/s} \approx 1400 \text{ m/s}$

• Gaz: modèle du GP

- eq<sup>s</sup> d'état  $\mu_0 = \frac{M P_0}{RT}$
- $\chi_s$ ? à entropie cste + GP  $\Rightarrow$  Laplace

$$d \left[ \ln [P \cdot \mu^{-\gamma} = \text{cste}] \right]$$

$$\chi_s = \frac{1}{\mu} \left( \frac{d\mu}{dP} \right)_s = \frac{1}{\gamma P}$$

$$\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\mu}{\mu} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{d\mu}{dP} = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu}{P}$$

$$\mu_0 \chi_s = \frac{M P_0}{RT} \times \frac{1}{\gamma P_0} = \frac{M}{\gamma R T}$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

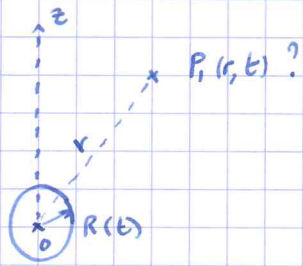
• AN air  $M = 29 \text{ g/mol}$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7R/2}{5R/2} = \frac{7}{5} \approx 1,4 \quad \text{à } 20^\circ\text{C}: c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



## II - Ondes sonores planes progressives harmoniques (OSPPH)

### 1 - Onde sphérique progressive harmonique rayonnée par une sphère pulsante.



$$R(t) = R_0 + r_1 \cos \omega t \quad r_1 \ll R_0 \ll \lambda$$

$$\text{donnée: } \Delta p(r, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r p(r, t))$$

Q: onde sonore rayonnée ds H l'espace ?

•  $p_1(r, t)$  est sol de  $\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \Delta p_1$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r p_1(r, t))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r p_1(r, t)) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r p_1(r, t)) \quad \text{d'Alembert 1D pr } r p_1$$

$$\Rightarrow r p_1(r, t) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

$$p_1(r, t) = \underbrace{\frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right)}_{\text{onde sphérique divergente}} + \underbrace{\frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c}\right)}_{\text{O.S. CV}}$$

surfaces d'ondes  
" surfaces isobares à t donné  
" sphères de centre O  
" ondes sphériques

• milieu  $\infty$ :  $\Rightarrow$  pas de réflexion à l' $\infty$   
 $\rightarrow$  OS DV seulement

$$p_1(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

• Linéarité du pb + RSF imposé par  $R(t)$ :  $\underline{p}_1(r, t) = \frac{A}{r} e^{j(\omega(t - \frac{r}{c}) + \varphi)}$

• Champ des vitesses ?

$$= \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr + \varphi)}$$

$$\mu_0 \frac{\partial \underline{v}_1}{\partial t} = -\text{grad } p_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial r} \underline{u}_r \quad \text{or } \underline{v}_1 \propto e^{j\omega t}$$

$$\mu_0 j \omega \underline{v}_1 = - \left[ -\frac{A}{r} \left( jk + \frac{1}{r} \right) \right] e^{j(\omega t - kr + \varphi)} \underline{u}_r$$

$$\Rightarrow \underline{v}_1(r, t) = \frac{A}{r} \left[ \frac{k}{\mu_0 \omega} - \frac{j}{\mu_0 \omega r} \right] e^{j(\omega t - kr + \varphi)} \underline{u}_r$$

$$\underline{v}_1 = \frac{A}{\mu_0 c r} \left( 1 - \frac{j}{kr} \right) e^{j(\omega t - kr + \varphi)} \underline{u}_r$$

$$\underline{v}_1 = \frac{\underline{p}_1(r, t)}{\mu_0 c} \left( 1 - \frac{j}{kr} \right) \underline{u}_r$$

• CL en  $r = R(t)$

$$\vec{v}_1(R(t), t) = \frac{dR(t)}{dt} = j\omega r_1 e^{j\omega t}$$

$$\vec{v}_1(R_0, t) = \frac{A}{\mu_0 c R_0} \left( X - \frac{j}{k R_0} \right) e^{j(\omega t - k R_0 + \varphi)} = -\frac{jA}{\mu_0 c k R_0^2} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$-\frac{jA e^{j\varphi}}{\mu_0 c k R_0^2} = j\omega r_1 \Leftrightarrow A e^{j\varphi} = -\mu_0 c k \omega R_0^2 r_1 \Rightarrow A e^{j\varphi} = -\mu_0 R_0^2 r_1 \omega^2 \begin{cases} \varphi = \pi \\ A = \mu_0 R_0^2 r_1 \omega^2 \end{cases}$$

donc  $P_1(r, t) = -\frac{\mu_0 R_0^2 r_1 \omega^2}{r} \cos(\omega(t - \frac{r}{c}))$

et  $\vec{v}_1(r, t) = -\frac{R_0^2 r_1 \omega^2}{c r} \left[ \cos(\omega(t - \frac{r}{c})) + \frac{1}{kr} \sin(\omega(t - \frac{r}{c})) \right] \vec{u}_r$

2. Modèle de l'onde plane progressive harmonique dans la zone de rayonnement (ou en "champ lointain").

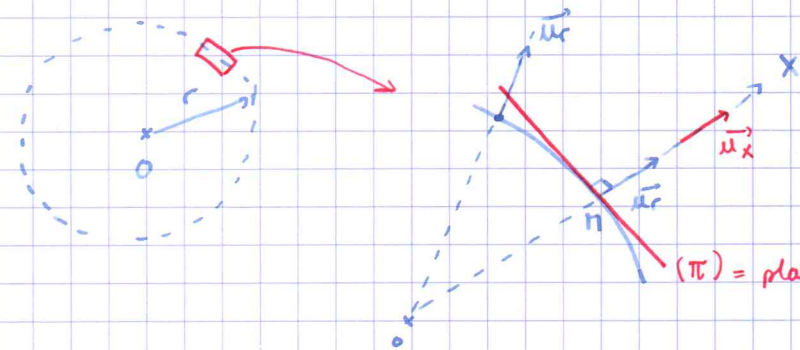
$r \gg \lambda : \vec{v}_1(r, t) \approx \frac{P_1(r, t)}{\mu_0 c} \vec{u}_r$  où  $P_1 = \frac{K}{r} \cos(\omega(t - \frac{r}{c}))$

→ phéno de propa prépondérant

$\tau_{propa} \gg T$

• Dans la ER : soit une portion de surface d'onde de dim. transversale  $L \ll r$  et  $L \ll \lambda$

i.e.  $r \gg \lambda$  ou  $kr \gg 1$



ds cette zone :  $\frac{1}{r} \approx \text{cste}$

$\vec{u}_r \approx \vec{u}_x = \vec{e}_x$

$kr \approx kX = \vec{k} \cdot \vec{OM}$

$\vec{k} = k \vec{u}_x$

$= \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_x$

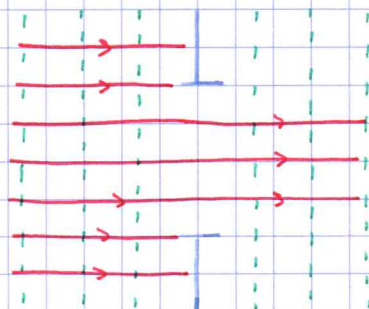
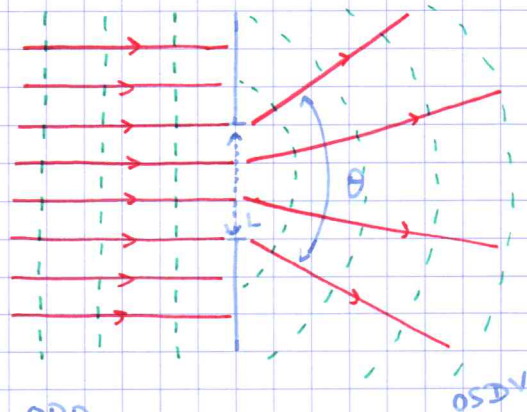
( $\pi$ ) = plan tangent en M

Alors  $P_1(r, t) \approx P_1(x, t) = K' \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}) = K' \cos(\omega t - kX)$

↳ surf. d'onde = plan ⇒ onde plane progressive (vers les x')

• ondes planes sphériques en diffraction

$\frac{\lambda}{L} \rightarrow$  diffraction ds l cône d'angle au sommet  $\theta$   
 $\sin \theta \sim \frac{\lambda}{L}$



$\theta = 0$  pas de diff

acoustique géométrique

OPP diff  $\frac{\lambda}{L} \lesssim 1$



→ OG:  $f \in [20 \text{ Hz}, 20 \text{ kHz}]$

$c = 340 \text{ m/s}$        $\lambda = \frac{c}{f}$   
 $\lambda_{\text{grave}}^{\text{max}} = 17 \text{ m}$        $\lambda_{\text{aigu}}^{\text{min}} = 1,7 \text{ cm}$

forte diff ↙

↳ acoustique g er satisfaisante

3- l'OPPH : solution élémentaire de l'éq de d'Alembert   3D .

→ soit 1 pb d'acoustique pcc   3D .

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \Delta p_1$$

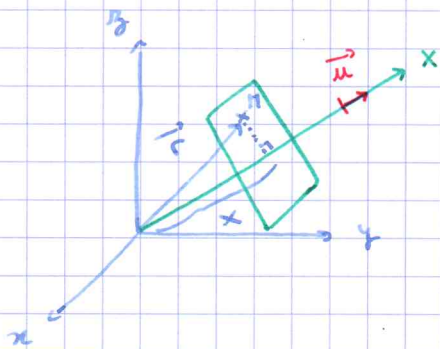
(a) Notion d'onde plane progressive harmonique .

⊙ Onde plane  $P_1(\vec{r}, t) = p_1(x, y, z, t)$  est une onde plane si :

(i)  $p_1(\vec{r}, t)$  est sol. d'onde

et (ii)  $p_1(\vec{r}, t)$  est invariant par translation //     un plan de direction fixée

i.e.  $P_1(\vec{r}, t) = P_1(x, y, z, t) = P_1(x, t)$   
↔ onde plane



→ pour l'onde plane  $P_1(x, t)$ ,  $\Delta p_1 = \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$

donc  $\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$

⇒ l'onde plane  $P_1(x, t)$  peut s'écrire :

$$P_1(x, t) = \underbrace{f\left(t - \frac{x}{c}\right)}_{\text{OPP}^+} + \underbrace{g\left(t + \frac{x}{c}\right)}_{\text{OPP}^-}$$

ou  $P_1(\vec{r}, t) = f\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}\right) + g\left(t + \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}\right)$

⊙ Onde plane progressive harmonique

l'c OPP( $\vec{u}$ ) = somme d'OPPH [ $\vec{u}, \omega$ ]

$$P_1(\vec{r}, t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}\right) + \varphi\right) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

$$\vec{k} = k \vec{u} = \frac{\omega}{c} \vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$$

NB:  $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$$P_1(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi)$$

$$= A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z) + \varphi\right)$$

(b) l'OPPH : solution élémentaire de l'éq de d'A. 3D

⊙ Th de superp. des solut<sup>o</sup>:

→ 1 solution qqc de d'A 3D peut s'écrire :

$$P_1(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{u}} \sum_{\omega} A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \quad \text{où } \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$$

↑  
dépendant de  $(\omega, \vec{u})$

#### 4- Utilisation de la notation complexe

Soit une OPPH  $(\vec{u}, \omega)$  :  $P_1(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$

$$\underline{P}_1(\vec{r}, t) = A e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)}$$

↓ linéarité

#### ● Opérateurs de dérivation

$$\frac{\partial \underline{P}_1}{\partial t} = j\omega \underline{P}_1 \quad \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow \times j\omega$$

$$\vec{\text{grad}} \underline{P}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{P}_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{P}_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \underline{P}_1}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -jk_x \underline{P}_1 \\ -jk_y \underline{P}_1 \\ -jk_z \underline{P}_1 \end{pmatrix} = \underline{P}_1 \times (-j\vec{k})$$

$\vec{\nabla} \cdot \leftrightarrow -j\vec{k}$

$$\Delta \underline{P}_1 = \text{div}(\vec{\text{grad}} \underline{P}_1) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \underline{P}_1) = -k^2 \underline{P}_1$$

#### 5- Relation de dispersion des OPPH

$$\underline{P}_1 = A e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)} \quad \xrightarrow{\text{d'A 3D}} \quad -\omega^2 \underline{P}_1 = c^2 (-k^2 \underline{P}_1)$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{i.e. } k = \pm \frac{\omega}{c} \quad \text{pas de dispersion}$$

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{\omega}{k} = \pm c \\ v_y &= v_x = \pm c \end{aligned} \right\} \text{indép de } \omega$$

#### 6- Caractère longitudinal d'une OSPP

→ Soit 1 OPPH :  $\underline{P}_1(\vec{r}, t) = A e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)}$

● Champ des vitesses ?

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} \underline{P}_1$$

$$\mu_0 \times j\omega \vec{v}_1 = -(-j\vec{k} \underline{P}_1) \Rightarrow \vec{v}_1(\vec{r}, t) = \frac{\underline{P}_1(\vec{r}, t)}{\mu_0 \omega} \vec{k} = \frac{\underline{P}_1(\vec{r}, t)}{\mu_0 c} \vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1(\vec{r}, t) = \frac{\underline{P}_1(\vec{r}, t)}{\mu_0 c} \vec{u} \quad // \vec{u} \quad \text{vrai } v_w$$

⇒ 1 onde PP est longitudinale



## 7 - Impédance acoustique pour 1 OPP

(a) Onde plane progressive OPP<sup>+</sup> (+ $\vec{u}$ )

On pose  $Z = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_s}}$

• Pour 1 OPP<sup>+</sup> (+ $\vec{u}$ )

impédance acoustique du milieu

$$\vec{v}_1^+(\vec{r}, t) = \frac{P_1^+(\vec{r}, t)}{Z} \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{v}^+(\vec{r}, t) = v_1^+(\vec{r}, t) \vec{u}$$

$$\Rightarrow P_1^+(\vec{r}, t) = + Z v_1^+(\vec{r}, t) \quad \text{OPP}^+(\vec{u})$$

(b) Onde plane régressive OPP<sup>-</sup> (- $\vec{u}$ )

$$P_1^\ominus = A e^{j(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)}$$

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1^\ominus}{\partial t} = - \text{grad} P_1^\ominus$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1^\ominus = - \frac{P_1^\ominus(\vec{r}, t)}{Z} \vec{u}$$

$$\mu_0 j \omega \vec{v}_1^\ominus = - (j \vec{k} P_1^\ominus)$$

$$\text{i.e. } P_1^\ominus(\vec{r}, t) = - Z v_1^\ominus(\vec{r}, t)$$

(c) Ordres de grandeur

$$Z_{\text{gaz}} \ll Z_{\text{liq}} < Z_{\text{sol}}$$

## 2.8. Bilan: structure d'une onde sonore plane progressive

• 1 OPP(+): (i) onde longitudinale:  $\vec{v}_1^+ \parallel \vec{u}$

(ii)  $P_1^+ = \oplus Z v_1^+ \quad Z = \mu_0 c$

définissent

la structure de l'OSPP<sup>+</sup>:  $\vec{v}_1^+(\vec{r}, t) = \frac{P_1^+(\vec{r}, t)}{Z} \vec{u}$

• Retour sur l'onde sphérique SV: dans la ZR ( $r \gg \lambda$ ):

$$P_1(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr)$$

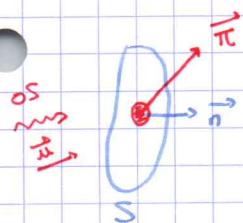
$$\vec{v}_1(r, t) \approx \frac{A}{\mu_0 c r} \cos(\omega t - kr) \vec{v}_r = \frac{P_1(r, t)}{\mu_0 c} \vec{u}_r$$

→ rel. de structure d'1 OPP<sup>+</sup>( $\vec{u}_r$ ), localement

## III - Aspects énergétiques de la propagation du son

1 - Puissance transportée par une onde sonore. Vecteur densité de courant de l'énergie sonore. "Vecteur de Poynting".

(a) Vecteur  $\vec{\Pi}$ : du fait de l'onde, la surf. S est traversée par la puissance.



$$\text{éf: } P_s = \iint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{n} dS$$

$\downarrow$   
W.m<sup>-2</sup>

$$\langle P_s \rangle = \iint_S \langle d\vec{F} \cdot \vec{v}_1 \rangle = \iint_S \langle (P_0 + P_1) \cdot \vec{n} \cdot dS \cdot \vec{v}_1 \rangle$$

$$\langle P_s \rangle = 0 + \iint_S \underbrace{\langle P_i \vec{v}_i \rangle}_{\langle \vec{\pi} \rangle} \cdot \vec{n} \, dS \quad \forall \text{ type d'ondes}$$

donc  $\vec{\pi}(\vec{r}, t) = P_1(\vec{r}, t) \vec{v}_1(\vec{r}, t)$

(b) Onde sphérique :  $P_1(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr)$

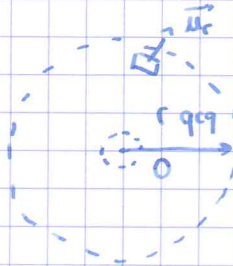
$$\vec{v}_1(r, t) = \frac{A}{\mu_0 c r} \left[ \cos(\omega t - kr) + \frac{\sin(\omega t - kr)}{kr} \right] \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \langle \vec{\pi}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{A^2}{\mu_0 c r^2} \left[ \langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle + \frac{1}{kr} \langle \cos(\omega t - kr) \sin(\omega t - kr) \rangle \right] \vec{u}_r$$

$$\langle \vec{\pi}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{A^2}{2\mu_0 c r^2} \vec{u}_r$$

$$\langle P_s \rangle = \oint_{\text{sphère}} \langle \vec{\pi} \rangle \cdot \vec{n}_{\text{ext}} \, dS$$

$$= \oint_{\text{sph}} \frac{A^2}{2\mu_0 c r^2} dS = \frac{A^2}{2\mu_0 c r^2} \times 4\pi r^2$$



$$\Rightarrow \langle P_s \rangle = \frac{2\pi A^2}{\mu_0 c} = \text{cste indep. de } r$$

Concl:  $\begin{cases} P_1 \propto \frac{1}{r} \\ \vec{v}_1 \propto \frac{1}{r} \end{cases}$  traduit la cons. de l'énergie  
(pas de dissipation mais "dilution" de la puissance à mesure qu'on s'éloigne la source)

## 2. Densité volumique d'énergie sonore - Eq locale de cons. de l'énergie sonore

(a) Densité volumique d'énergie sonore

→ densité vol. d'énergie cinétique :  $e_c(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2(\vec{r}, t)$

→ densité vol. d'énergie potentielle : (de type élastique)

on cherche  $e_p(\vec{r}, t) \propto P_1^2(\vec{r}, t)$

$$\text{J. m}^{-3} \quad P_1^2 = (\text{J. m}^{-3})^2$$

on pose  $e_p(\vec{r}, t) \hat{=} \frac{1}{2} \chi_s P_1^2(\vec{r}, t) \quad (\text{J. m}^{-3})$

→ densité vol. d'énergie sonore  $e_s(\vec{r}, t) \hat{=} \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} \chi_s P_1^2(\vec{r}, t)$

(b) Eq. locale de conservation de l'énergie sonore

• Calculons :  $\frac{\partial}{\partial t} (e_c + e_p) = \underbrace{\mu_0 \vec{v}_1 \frac{\partial v_1}{\partial t}}_{-\text{grad } P_1} + \underbrace{\chi_s P_1 \frac{\partial P_1}{\partial t}}_{-\text{div } \vec{v}_1}$



$$\rightarrow \text{à 1D: } \left. \begin{array}{l} P_i(\vec{r}, t) \\ \vec{v}_i(\vec{r}, t) = v_i(\vec{r}, t) \vec{u}_x \end{array} \right\} -v_i \frac{\partial P_i}{\partial x} - P_i \frac{\partial v_i}{\partial x}$$

$$\rightarrow \text{à 3D: } \operatorname{div}(f\vec{A}) = f \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \operatorname{grad} f$$

$$\text{d'où } \frac{\partial}{\partial t} (e_c + e_p) = -\operatorname{div}(P_i \vec{v}_i) = -\operatorname{div}(\vec{\Pi})$$

$$\boxed{\frac{\partial e_s}{\partial t}(\vec{r}, t) + \operatorname{div}(\vec{\Pi}(\vec{r}, t)) = 0}$$

### 3 - Cas d'une onde plane progressive

(a) Vecteur  $\vec{\Pi}$  et densité d'énergie pour 1 OPP

$$\textcircled{\bullet} \text{ Soit 1 OPP } (\rightarrow \vec{u}) : \vec{v}_i^+(\vec{r}, t) = \frac{P_i^+(\vec{r}, t)}{\mu_0 c} \vec{u} \quad \text{relation de structure}$$

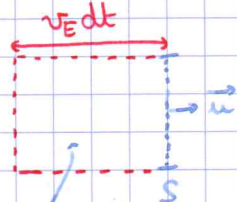
$$\rightarrow \vec{\Pi}(\vec{r}, t) = \frac{P_i^+(\vec{r}, t)^2}{Z} \vec{u} = Z (v_i^+(\vec{r}, t))^2 \vec{u}$$

$$\textcircled{\bullet} e_c = \frac{1}{2} \mu_0 v_i^{+2} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{P_i^{+2}}{Z^2} = \frac{1}{2} \frac{P_i^{+2}}{\mu_0 c^2} = \frac{1}{2} \chi_s P_i^{+2}$$

$$\text{Pr 1 OPP: } e_c(\vec{r}, t) = e_p(\vec{r}, t) \Rightarrow e_s(\vec{r}, t) = \mu_0 v_i^2(\vec{r}, t) = \chi_s P_i^2(\vec{r}, t)$$

$$\textcircled{\bullet} \text{ on note } \vec{\Pi} = c \cdot e_s \vec{u} \quad \text{pr 1 OPP } (\rightarrow \vec{u})$$

③ Vitesses de propagation de l'énergie  $v_E$



$$\langle \delta E_s \rangle = \langle e_s \rangle \times S v_E dt$$

$$\text{or } \langle \delta E_s \rangle = \langle \mathcal{P} \rangle \times dt = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle \times S dt$$

$$v_E = \frac{\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle}{\langle e_s \rangle} = c$$

(b) Cas d'une OPPH

$$\textcircled{\bullet} \text{ OPPH } [\omega, +\vec{u}_x] : \begin{cases} P_i(\vec{r}, t) = P_i(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi) \\ \vec{v}_i(\vec{r}, t) = \vec{v}_i(x, t) = \frac{A}{Z} \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\Pi}(x, t) = \frac{A^2}{Z} \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_x \\ e_s(x, t) = \chi_s A^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{A^2}{2Z} \vec{u}_x$$

$$\langle e_s \rangle = \frac{\chi_s A^2}{2} = \frac{\langle \Pi \rangle}{c}$$

A partie math :  $f(t)$  et  $g(t)$  sinusoidales  $T$  pér.

$$\langle f(t) g(t) \rangle = ? = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} AB \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{AB}{2} \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} \rightarrow f(t) &= A e^{i\omega t} \\ g(t) &= B e^{i(\omega t + \varphi)} \end{aligned} \quad \rightarrow \text{Re} \left[ \underline{f} \cdot \underline{g}^* = A e^{i\omega t} \cdot B e^{-i(\omega t + \varphi)} = AB e^{-i\varphi} \right]$$

concl:  $\langle f(t) g(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \underline{f} \underline{g}^* \right]$

$$\langle \vec{A}(t) \wedge \vec{B}(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \vec{A} \wedge \vec{B}^* \right)$$

$$\rightarrow \underline{P}_i = A e^{i(\omega t - kx + \varphi)}$$

$$\underline{v}_i = \frac{A}{Z} e^{i(\omega t - kx + \varphi)} \vec{u}_x$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \underline{P}_i \cdot \underline{v}_i^* \right)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} \left( A e^{i\varphi} \cdot \frac{A}{Z} e^{-i\varphi} \vec{u}_x \right)$$

$$\text{donc } \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{A^2}{2Z} \vec{u}_x$$

#### 4- Intensité acoustique et niveau sonore

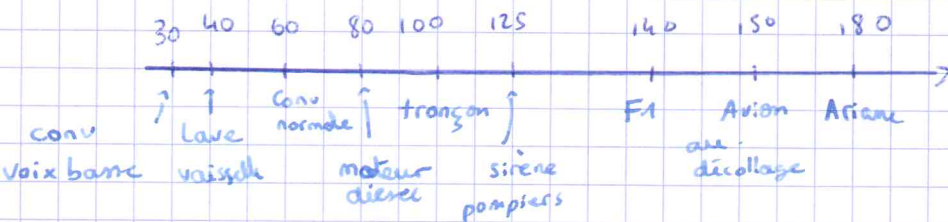
• Intensité acoustique :  $I \hat{=} \langle \|\vec{\pi}\| \rangle$

• Oreille = dét. log

NB:  $L_{dB} = 20 \log \frac{A}{A_0}$

↳ niveau sonore :  $L_{dB} \hat{=} 10 \log \frac{I}{I_0}$

$I_0 \hat{=} 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$



#### 5- Validation numérique de l'approx acoustique et des hypos du modèle

(a) Approx. acoustique :  $L_{dB} \quad 0 \text{ dB} \rightarrow 120 \text{ dB}$

$$P_{i,max} = \sqrt{2ZI}$$

$$I (\text{W/m}^2) \quad 10^{-12} \rightarrow 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$P_{i,max} \quad 2,8 \cdot 10^{-5} \rightarrow 28 \text{ Pa} \ll P^0$$

$$v_{i,max} \quad 70 \text{ cm/s} \rightarrow 7 \text{ cm/s} \ll 340 \text{ m/s}$$

$$v_{max} \sim \omega \xi_{max} \quad \xi_{max} (1 \text{ kHz}) : 11 \text{ pm} \rightarrow 11 \mu\text{m}$$

$$\text{à } 1 \text{ kHz} : \lambda = 34 \text{ cm}$$

$$\text{i.e. } \left| v_i \frac{\partial v_i}{\partial z} \right| \neq \frac{\xi_{max}}{\lambda} \ll 1$$

(b) Evr isentropique  $\rightarrow$  adiab/rév : diff therm. négligée

$$\rightarrow \text{échelle de tps de l'onde } T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\rightarrow \text{de diff. th: } T_{diff} \sim \frac{L^2}{D_{th}} = \frac{\lambda^2}{D_{th}}$$



$$\frac{\tau_{diff}}{T} = \frac{\lambda^2}{D_H \cdot T} = \frac{\lambda c}{D_H} = \frac{c^2}{D_H \cdot f} \gg 1$$

$$\Rightarrow f \ll \frac{c^2}{D_H}$$

$$f \ll 5 \text{ GHz}$$

$$D_H^{air} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$D_H^{eau} \neq 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

(c) Absence de viscosité

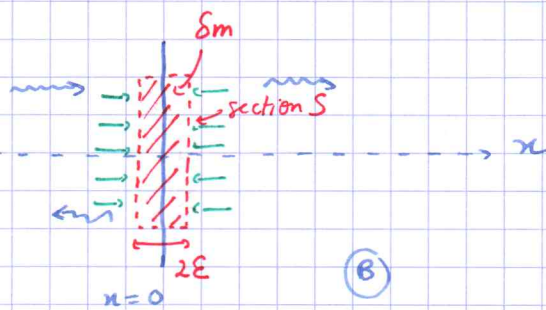
$$\tau_{diff}^{qdm} \neq \frac{L^2}{\nu} = \frac{\lambda^2}{\nu} \Rightarrow \frac{\tau_{diff}^{qdm}}{T} \gg 1 \text{ i.e. } f \ll \frac{c^2}{\nu} \sim 10 \text{ GHz ds l'air}$$

(d) Pente négligée :

$$\frac{\mu \cdot g}{\rho \cdot \lambda} \neq \frac{\mu \cdot g}{\rho \cdot \lambda} = \mu_0 \chi_s \times g \lambda = \frac{g \lambda}{c^2} \neq 3 \cdot 10^{-4}$$

## IV - Ondes sonores et interfaces

1 - Conditions aux limites à l'interface de 2 milieux



C.L. ? en  $x=0$  :

⊗ CL sur la vitesse :

$$v_{1A}(x=0^-, t) = v_{1B}(x=0^+, t)$$

⊗ CL sur la pression :

$$\text{PFD à } \delta m : \delta m \cdot \vec{a}' = (P_0 + P_A(-\epsilon, t)) \times S \cdot \vec{u}_x - (P_0 + P_B(+\epsilon, t)) \times S \cdot \vec{u}_x$$

$\epsilon \rightarrow 0$

(A)  $(z_A, c_A)$

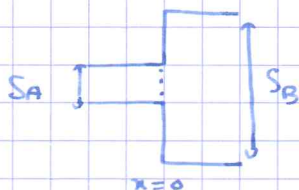
(B)  $(z_B, c_B)$

$$\vec{v}_{1A}(x \leq 0, t) = v_{1A}(x, t) \vec{u}_x$$

$$\vec{v}_{1B}(x \geq 0, t) = v_{1B}(x, t) \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow P_{1A}(0^-, t) = P_{1B}(0^+, t) \text{ continuité de } P$$

→ Rem: discontinuité de section



$$\rightarrow \text{on a tjrs } P_{1A}(0^-, t) = P_{1B}(0^+, t)$$

$$\text{mais } D_{vA}(0^-, t) \neq D_{vB}(0^+, t)$$

$$\text{et } S_A v_{1A}(0^-, t) = S_B v_{1B}(0^+, t)$$

2. Onde sonore PPH tombant sous incidence normale sur une interface plane : réciproité d'une onde réfléchie.

Hypo: ds milieu A : onde inc. (pas d'onde réfléchie)

ds milieu B : onde transmise

⊙ Onde incidente  $[\omega, +\vec{u}_x]$

$$P_i(x \leq 0, t) = A e^{j(\omega t - k_A x)} \quad \text{avec } k_A = \frac{\omega}{c_A}$$

$$\vec{v}_i(x \leq 0, t) = \frac{A}{Z_A} e^{j(\omega t - k_A x)} \vec{u}_x$$

⊙ Onde transmise dans B  $[\omega, +\vec{u}_x]$ :  $P_t(x > 0, t) = C e^{j(\omega t - k_B x)} \quad k_B = \frac{\omega}{c_B}$

$$\vec{v}_t(x > 0, t) = \frac{C}{Z_B} e^{j(\omega t - k_B x)} \vec{u}_x$$

⊙ CL en  $x=0$ :

→ cont. de la pression :  $A = C$  car  $P_i(0, t) = P_t(0, t)$

→ cont. de la vitesse :  $v_i(0, t) = v_t(0, t)$

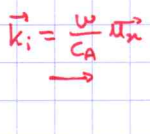
$$\Rightarrow \frac{A}{Z_A} = \frac{C}{Z_B} \Rightarrow Z_A = Z_B : \text{pas de changement de milieu}$$

absurde puisque  $Z_A \neq Z_B$

↳ il faut une onde réfléchie

3. Les 3 ondes : incidente, réfléchie, transmise

⊙ milieu A



onde inc:  $P_i(x \leq 0, t) = A e^{j(\omega t - k_A x)}$

$$\vec{v}_i(x \leq 0, t) = \frac{A}{Z_A} e^{j(\omega t - k_A x)} \vec{u}_x$$

onde réf:  $P_r(x \leq 0, t) = B e^{j(\omega t + k_A x)}$

$$\vec{v}_r(x \leq 0, t) = -\frac{B}{Z_A} e^{j(\omega t + k_A x)} \vec{u}_x$$

⊙ milieu B onde transmise  $P_t(x > 0, t) = C e^{j(\omega t - k_B x)} \vec{u}_x \quad k_B = \frac{\omega}{c_B}$

4. Coefficients de réflexion et transmission pour l'amplitude de la surpression et de la vitesse.

⊙ CL en  $x=0$ : → pressions:  $P_i(0^-, t) + P_r(0^-, t) = P_t(0^+, t)$

→ vitesse:  $\vec{v}_i(0^-, t) + \vec{v}_r(0^-, t) = \vec{v}_t(0^+, t)$

$$\text{i.e. } \frac{A}{Z_A} - \frac{B}{Z_A} = \frac{C}{Z_B}$$

$$\text{soit } A - B = \frac{Z_A}{Z_B} C$$

$$Q: \text{ exp. B et C en fctn de A : } 2A = \left(1 + \frac{Z_A}{Z_B}\right) C \Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{2Z_B}{Z_A + Z_B}$$



et  $\frac{B}{A} = \frac{C}{A} - 1 = \frac{z_B - z_A}{z_B + z_A}$

Def: coeff<sup>t</sup> de réflexion et transmission pr les amplitudes

pression

vitesse

$$r_p = \frac{P_r(0^+, t)}{P_i(0^+, t)} = \frac{B}{A} = \frac{z_B - z_A}{z_B + z_A}$$

$$r_v = \frac{v_r(0^+, t)}{v_i(0^+, t)} = \frac{-B/z_A}{A/z_A} = \frac{z_A - z_B}{z_A + z_B}$$

$$t_p = \frac{P_t(0^+, t)}{P_i(0^+, t)} = \frac{C}{A} = \frac{2z_B}{z_A + z_B}$$

$$t_v = \frac{v_t(0^+, t)}{v_i(0^+, t)} = \frac{C/z_A}{A/z_A} = \frac{2z_B}{z_A + z_B}$$

Cas limites

(i)  $z_A = z_B$   $r_p = r_v = 0$  absence de réflexion

$t_p = t_v = 1$  transmission totale

(ii)  $z_A \ll z_B$   $r_p = -r_v \approx 1$  réflexion totale

air  $\rightarrow$  eau

$t_p \approx 2$

à l'interf: | ventre de pression  
noeud de vitesse

$t_v \approx 0$

(iii)  $z_A \gg z_B$

eau  $\rightarrow$  air

$r_p = -r_v = -1$

à l'interf: | noeud de pression  
ventre de vitesse

$t_p \approx 0$

réflexion totale

$t_v \approx 2$

5 - Coefficients R et T pour les [puissances]. Adaptation d'impédance acoustique intensités

Def:  $R \hat{=} \frac{I_r(0^+)}{I_i(0^+)}$

$T \hat{=} \frac{I_t(0^+)}{I_i(0^+)}$

A réel

B réel car  $r_p \in \mathbb{R}$

Vecteurs  $\vec{\pi}$ :  $\rightarrow \vec{\pi}_i (x \leq 0, t) = P_i \vec{v}_i = \frac{A^2}{2z_A} \cos^2(\omega t - k_A x) \cdot \vec{u}_x$

$\rightarrow \vec{\pi}_r (x \leq 0, t) = P_r \vec{v}_r = \ominus \frac{B^2}{2z_A} \cos^2(\omega t + k_A x) \cdot \vec{u}_x$

$\rightarrow \vec{\pi}_t (x > 0, t) = P_t \vec{v}_t = \oplus \frac{C^2}{2z_B} \cos^2(\omega t - k_B x) \cdot \vec{u}_x$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_i = \frac{A^2}{2z_A} \\ I_r = \frac{B^2}{2z_A} \\ I_t = \frac{C^2}{2z_B} \end{cases}$$

Exp. de R et T

$$R = \frac{B^2}{A^2} = r_p^2 = \left| \frac{z_A - z_B}{z_A + z_B} \right|^2$$

fraction de puissance réfléchi

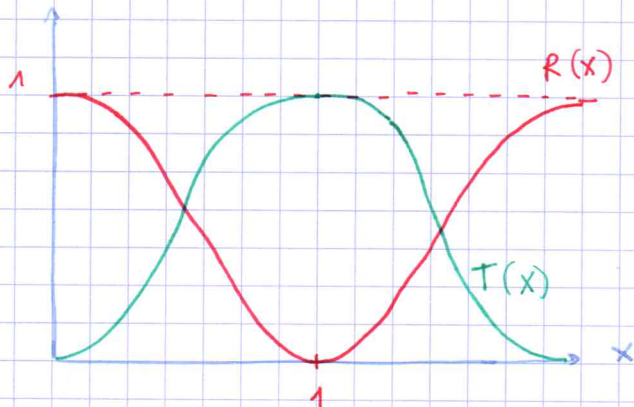
$$T = \frac{z_A}{z_B} \frac{C^2}{A^2} = \frac{z_A}{z_B} \frac{4z_B^2}{(z_A + z_B)^2} = \frac{4z_A z_B}{(z_A + z_B)^2}$$

frac<sup>t</sup> de puissance transmise

$$R+T = \frac{(Z_A - Z_B)^2 + 4Z_A Z_B}{(Z_A + Z_B)^2} = 1 \quad \text{conservation de l'énergie}$$

⊙ Posons  $X \hat{=} \frac{Z_A}{Z_B}$   $R(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$   $x \in \mathbb{R}^+$

$$T(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$$



⊙  $x=1$  i.e.  $Z_A = Z_B$  :

$R=0$  absence de réfl.  
 $T=1$  toute l'énergie inc. est transmise

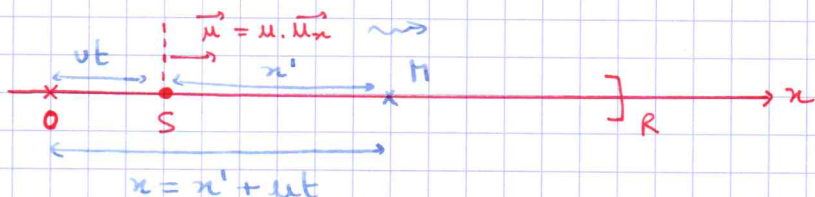
⊙  $x \rightarrow 0$  ou  $x \rightarrow \infty$   $Z_A \ll Z_B$  ou  $Z_B \ll Z_A$

$R \rightarrow 1$  réfl. totale  
 $T \rightarrow 0$

## 6- Effet Doppler longitudinal

(a) Source mobile, récepteur fixe

⊙ Source s'approchant du récepteur



→ se émet à  $\omega_s$   
→  $\omega$ : pulsation  $\omega_R$  perçue par le récepteur ?

→ pression invariante par changement de référentiel galiléen

ds  $R_S$ :  $P_1(x', t) = A e^{j(\omega_s t - k_s x')}$

ds  $R_R$ :  $P_1(x, t) = A e^{j(\omega_R t - k_R x)}$

$$A e^{j(\omega_s t - k_s(x-ut))} = A e^{j(\omega_R t - k_R x)}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e$$

$$= \vec{v}' + u \vec{u}_x$$

$$c \vec{u}_x' = c \vec{u}_x + u \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_s + k_s u = \omega_R \\ k_s = k_R \end{cases}$$

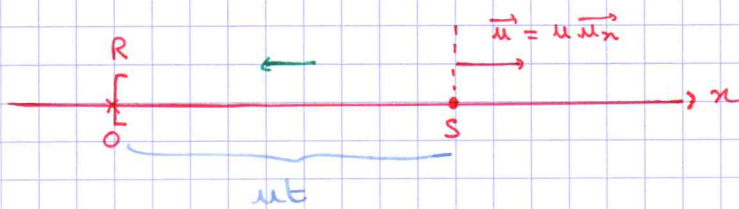
$$\text{or } \begin{cases} k_R = \frac{\omega_R}{c} \\ k_s = \frac{\omega_s}{c-u} \end{cases}$$

donc  $\omega_R = \omega_s + u \cdot \frac{\omega_s}{c-u}$  i.e.  $\omega_R = \frac{\omega_s}{1 - \frac{u}{c}} > \omega_s$  son + aigu

A.N.  $\begin{cases} u = 50 \text{ km/h} \\ f_s = 440 \text{ Hz} \end{cases} \Rightarrow \Delta f = 18 \text{ Hz}$



⑤ Source s'éloignant du récepteur



$$A e^{j(\omega_R t + k_R x)} = A e^{j(\omega_S t + k_S x')}$$

$$= A e^{j(\omega_S t + k_S (x - ut))}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_R = k_S \\ \omega_R = \omega_S - uk_S \end{cases} \quad \text{or} \quad k_R = \frac{\omega_R}{c} \quad k_S = \frac{\omega_S}{c+u}$$

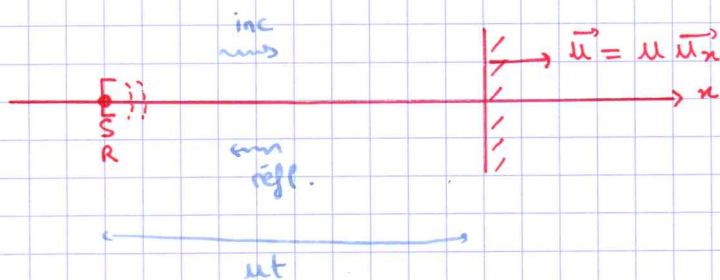
$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e$$

$$= \vec{v}' + u \cdot \vec{u}_n$$

$$-c \vec{u}_n = -c' \vec{u}_n + u \vec{u}_n$$

$$\omega_R = \omega_S - u \frac{\omega_S}{c+u} = \frac{c}{c+u} \omega_S = \frac{\omega_S}{1+u/c} < \omega_S \quad \text{son grave}$$

(b) Source et récepteur fixe (au m pt), cible mobile



hypo:  $u > 0$

$u < c$

⑥ Ds R fixe :  $\underline{P}_i(x,t) = A e^{j(\omega_S t - k_S x)}$  avec  $k_S = \frac{\omega_S}{c}$   $\hat{m}$  milieu

$\underline{P}_r(x,t) = \underline{B} e^{j(\omega_R t + k_R x)}$   $k_R = \frac{\omega_R}{c}$   $\downarrow$  au repos

⑦ CL en  $x=ut$  : réfl. totale avec  $r_p = 1$

$$r_p = \frac{\underline{B} e^{j(\omega_R t + k_R ut)}}{A e^{j(\omega_S t - k_S ut)}} = 1 \quad \forall t$$

$$\underline{B} e^{j(\omega_R + uk_R)t} = A e^{j(\omega_S - uk_S)t}$$

$$\Rightarrow \underline{B} = A \quad \text{et} \quad \omega_R + uk_R = \omega_S - uk_S$$

$$\omega_R \left(1 + \frac{u}{c}\right) = \omega_S \left(1 - \frac{u}{c}\right)$$

$$\omega_R = \frac{\left(1 - \frac{u}{c}\right)}{\left(1 + \frac{u}{c}\right)} \omega_S \stackrel{u/c \ll 1}{=} \left(1 - \frac{2u}{c}\right) \omega_S$$

$\omega_R < \omega_S$

A.N.  $u = 60 \text{ km/h}$   $\left| \frac{\Delta f}{f_s} \right| = \frac{2u/c}{1-u/c} = 0,10$

(c) Mesure de décalage Doppler par détection | synchrone  
hétérodyne

OG: en TP:  $\begin{cases} u \sim 1 \text{ m/s} \\ f_s = 40 \text{ kHz} \end{cases}$

$\left| \frac{\Delta f}{f_s} \right| \approx \frac{2u}{c} \approx 6 \cdot 10^{-3}$

$\Delta f = \pm 4 \cdot 10^4 \cdot 6 \cdot 10^{-3}$

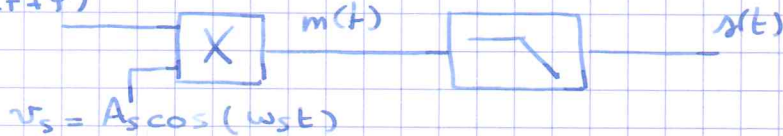
$\Rightarrow$  résolution spectrale  $\leq |\Delta f|$

$= \pm 240 \text{ Hz}$

• Idée: translation vers les BF + filtrage PB

• Principe:  $r_r = A_r \cos(\omega_r t + \varphi)$

$r_s = A_s \cos(\omega_s t + \varphi)$



$m(t) = k A_r A_s \cos(\omega_r t + \varphi) \cos(\omega_s t)$

$= \frac{k A_r A_s}{2} \left[ \underbrace{\cos((\omega_r + \omega_s)t + \varphi)}_{\approx 2\omega_s} + \cos(\Delta\omega \cdot t + \varphi) \right]$

• Pbas de  $\omega_c$  tq:  $\Delta\omega \ll \omega_c \ll 2\omega_s$

ex:  $f_s = 40 \text{ kHz}$

$2f_s = 80 \text{ kHz}$

$u \sim 1 \text{ m/s}$

$\Delta f = 240 \text{ Hz}$

$f_c \approx 500 \text{ Hz à } 1 \text{ kHz}$