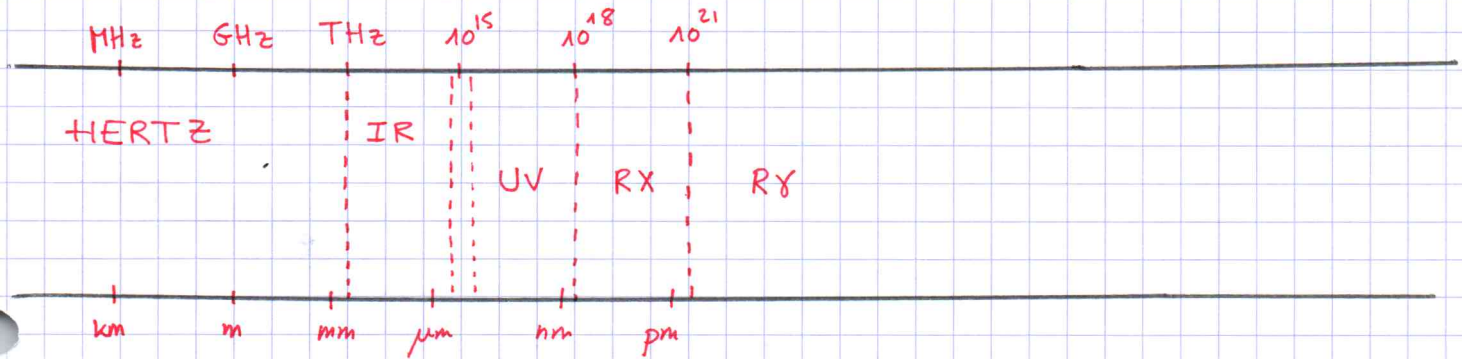


PO4 : ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LE VIDE

I - Equation de d'Alembert 3D

1 - Spectre électromagnétique - Applications



⊗ Télécoms : ondes hertziennes

→ téléphonie mobile : 300 MHz → 1,8 GHz

→ WiFi : 2,4 GHz

→ FM : 88 → 108 MHz

→ AM : 99 100 kHz

→ TV : 99 MHz

⊗ lumière :

IR - visible - UV
 $1 \mu\text{m} \rightarrow 300 \mu\text{m}$ $0,4 \mu\text{m} \rightarrow 0,8 \mu\text{m}$ $10 \text{ nm} \rightarrow 300 \text{ nm}$

⊗ RX :

[radiocristallographie
radiographie / radiothérapie]

2 - Les 2 équations de couplage de \vec{E} et \vec{B}

Vide $\rho = 0$
 $\vec{j} = \vec{0}$

$$\text{div } \vec{E} = 0 \qquad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{NF} \quad \left[\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \quad \left[\text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \quad \text{MA}$$

3 - Les équations de d'Alembert 3D vectorielles pour \vec{E} et \vec{B}

(a) Eq de propagation de \vec{E}

⊗ Formulaire : Soit $\vec{C}(\vec{r}, t)$, $\text{rot}(\text{rot } \vec{C}) = \text{grad}(\text{div } \vec{C}) - \Delta \vec{C}$

où

$$\Delta \vec{C} = \begin{pmatrix} \Delta C_x \\ \Delta C_y \\ \Delta C_z \end{pmatrix} \qquad \Delta C_x = \frac{\partial^2 C_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_x}{\partial z^2}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\underbrace{\text{div}(\vec{E})}_0) - \Delta \vec{E}$$

Schwarz

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & - \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) \\ & \parallel \\ & - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E} \quad *$$

équation de d'Alembert
3D vectorielle

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

(b) Eq de propagation de \vec{B}

$$c \hat{=} 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = \text{grad}(\underbrace{\text{div}(\vec{B})}_0) - \Delta \vec{B}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \epsilon_0 \text{rot } \vec{E}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta \vec{B} = c^2 \Delta \vec{B}$$

II - Ondes en planes, progressives, harmoniques

$E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ vérifient l'éq de d'Alembert 3D scalaire :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi$$

1 - χ 'onde en PPH: solution élémentaire de l'éq. de d'Alembert 3D

(a) Solution en OPPH

Vu que tt sol de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi$ peut s'écrire

$$\varphi(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\omega} S(\omega, \vec{u}) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \quad \text{ou } \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$$

(b) Champ \vec{E} d'1 Oem PPH

→ soit une sol élémentaire de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi$: $\varphi(\vec{r}, t) = S \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$

donc 1 Oem PPH (ω, \vec{u}) s'écrit :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_y) \\ E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_z) \end{pmatrix}$$

⚠ L'Oem PPH n'existe pas!

- éternelle
- support spatial ∞
- énergie ∞

⇒ Paquets d'ondes

2 - Utilisation de la notation complexe

LINÉARITÉ

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \underbrace{\begin{pmatrix} E_{0x} e^{i\varphi_x} \\ E_{0y} e^{i\varphi_y} \\ E_{0z} e^{i\varphi_z} \end{pmatrix}}_{\vec{E}_0} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

de m, $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{j(\omega t - k \cdot r)}$

Convention $e^{+j\omega t}$

Opérateurs de dérivation

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$$

$$\vec{\nabla} = -jk$$

$$\text{div } \vec{E} = -jk \cdot \vec{E}$$

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -jk \wedge \vec{E}$$

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \begin{cases} \Delta E_x = \text{div}(\text{grad } E_x) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} E) = -jk(-jk E_x) = -k^2 E_x \\ \Delta E_y = -k^2 E_y \\ \Delta E_z = -k^2 E_z \end{cases}$$

$$\vec{\Delta} \vec{E} = -k^2 \vec{E} \quad (\text{OPPH})$$

3- Caractère TEM de l'Oem PP(H)

div $\vec{E} = 0 = -jk \cdot \vec{E} = -j \frac{\omega}{c} \vec{\mu} \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{\mu} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{\mu} \perp \vec{E}$

div $\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{\mu} \cdot \vec{B} = 0, \vec{B} \perp \vec{\mu}$ l'Oem est TH.

* L'onde est transverse électrique (TE)

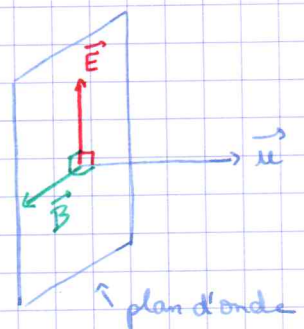
4- Relation de structure pour une onde EM PP (H)

PF: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -jk \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{k \wedge \vec{E}}{\omega}$

$$\vec{B} = \frac{k \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{\mu} \wedge \vec{E}}{c} \quad \text{Oem PP(H)} \quad \text{relation de structure}$$

$(\vec{\mu}, \vec{E}, \vec{B}) =$ trièdre orthogonal direct

$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$



5- Bilan: structure d'une Oem PP(H)

1) Onde TE et TH

2) $(\vec{\mu}, \vec{E}, \vec{B})$ trièdre \perp direct et $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$

$$\vec{B} = \frac{\vec{\mu} \wedge \vec{E}}{c}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow -jk \wedge \vec{B} = j \frac{\omega}{c^2} \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = c \vec{B} \wedge \vec{\mu}$$

NB: Impédance du vide $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ dans le vide

Pr 1 OPPH $\frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{H}\|} = \mu_0 \frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|} = \mu_0 c$

$$Z_0 \hat{=} \frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{H}\|} = \mu_0 c = 377 \Omega$$

⊗ Comparaison avec les ondes acoustiques

Onde en PP(H) (\vec{u})

- ① $\left\{ \begin{array}{l} TE: \vec{E} \perp \vec{u} \\ TM: \vec{B} \perp \vec{u} \end{array} \right\} \perp \vec{u}$
- ② Relation de structure: $\vec{B} = \frac{\mu \Lambda \vec{E}}{c}$
- ③ Impédance: $Z_0 = \frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{H}\|} = \mu_0 c = 377 \Omega$

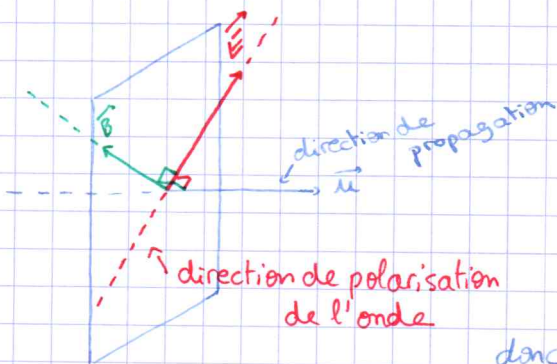
Onde sonore PP(H) (\vec{u})

- ① $\vec{u} \parallel \vec{u}$ LONGITUDINALE
- ② $\vec{A}_i = \frac{P_i}{\rho_0 c s} \vec{u}$
- ③ Impédance: $Z_{ac} \hat{=} \frac{P_i}{v_i} = \rho_0 c s$
(ex: air: $Z_{ac} = 400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$)

6- Polarisation d'une Oem PP H

⊗ on sait que $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B}) =$ trièdre \perp dir

Q: Comment évolue la dir de \vec{E} dans un plan d'onde au cours du temps



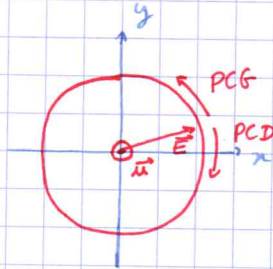
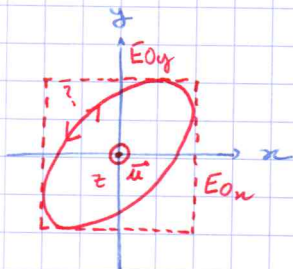
⊗ Soit 1 Oem PP H se propageant selon $+\vec{u}_z$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}_z$$

→ elle est TE et TM: $\begin{cases} E_z = 0 \\ B_z = 0 \end{cases}$

$$\rightarrow \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \omega t - kz$$

donc $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(z, t) = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \\ 0 \end{pmatrix}$

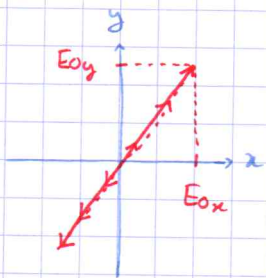


① $E_{0x} = E_{0y} = E_0$

② $\varphi_x = 0$ et $\varphi_y = \pm \pi/2$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ \pm E_0 \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cas général: Polarisation elliptique
PEG ou PED



$$\begin{cases} \varphi_x = 0 \\ \varphi_y = 0 \text{ ou } \pi \end{cases}$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ \pm E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz)$$

→ propa. rectiligne

vecteur est → dir de polarisation est

7- Cas de la polarisation rectiligne *

→ cas le + simple

fréquent: pol. rect. de la lumière réfléchiée par neige, du verre diffusée par l'atmosphère

filtres polarisants, lunettes 3D

$$\vec{E}(z,t) = (E_{0x} \vec{u}_x + E_{0y} \vec{u}_y) \cos(\omega t - kz)$$

$$E_0 \vec{v}$$

$$\tan \alpha = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} = \text{cste}$$

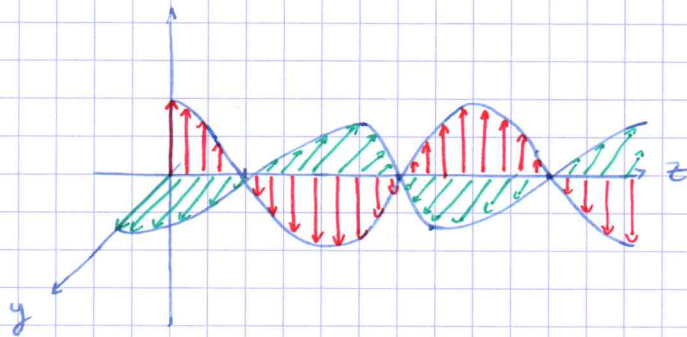
$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \cdot \vec{v}$$

ex: OPPH PR // \vec{u}_x

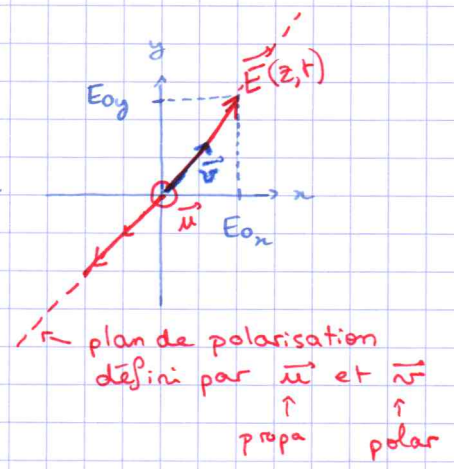
$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$$

dir. de propa PR

$$\vec{B} // \vec{u}_y$$



$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$$



l'Oém PPH PR = la solution la + élémentaire de d'A 3D

Soit une OPPH (\vec{u}_z, ω)

$$\vec{E}(z,t) = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x)}_{\text{OPPH PR // } \vec{u}_x} \vec{u}_x + \underbrace{E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y)}_{\text{OPPH PR // } \vec{u}_y} \vec{u}_y$$

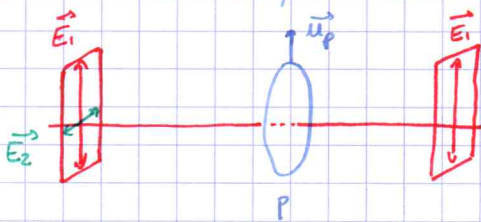
Clf: toute OPPH = somme de 2 OPPH PR à $\frac{\pi}{2}$ l'une de l'autre

8- Polarisation rectiligne par dichroïsme

la lumière naturelle (émise par une source qcq) n'est pas polarisée

→ dans un plan \perp à la dir. de propa: $\vec{E}(t)$ évolue aléatoirement

Polariseur dichroïque: caractérisé par une direction \vec{u}_p "azimut du polariseur"



* si $\vec{E}_{inc} // \vec{u}_p$: \vec{E}_{inc} est transmis

* si $\vec{E}_{inc} \perp \vec{u}_p$: \vec{E}_{inc} est absorbé

Conclusion

$$\vec{E}_{trans} = (\vec{E}_{inc} \cdot \vec{u}_p) \vec{u}_p$$

III - Aspects énergétiques

1 - Grandeurs énergétiques associées d'une OPP(H)

① μ_{em} et $\vec{\pi}$ pour 1 OPP $\rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$ donc $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$

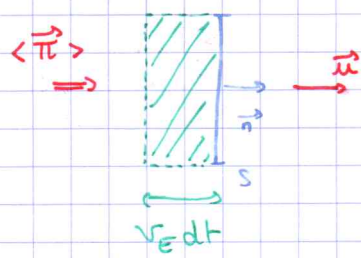
$\rightarrow \mu_{em} \hat{=} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$

donc $\mu_{em} = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$

$\rightarrow \vec{\pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{\mu_0 c} \right) = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u} = \epsilon_0 c E^2 \vec{u}$

selon $+\vec{u}$
 \rightarrow la prop de l'onde s'accompagne d'une propa. de l'énergie

② Vitesse de propagation de l'énergie : v_E ?



Pdt dt : $\langle \delta \epsilon \rangle = \langle \vec{\pi} \rangle \cdot \vec{n} S dt = \langle \|\vec{\pi}\| \rangle S dt$

\Rightarrow et $\langle \delta \epsilon \rangle = \langle \mu_{em} \rangle \times S v_E dt$

$\Rightarrow v_E = \frac{\langle \|\vec{\pi}\| \rangle}{\langle \mu_{em} \rangle} = c$

③ Cas d'une OPPH

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \end{pmatrix}$$

donc $\langle \mu_{em} \rangle = \epsilon_0 \langle E^2 \rangle = \epsilon_0 \left[\frac{E_{0x}^2}{2} + \frac{E_{0y}^2}{2} \right]$

$\langle \vec{\pi} \rangle = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle \vec{u}_z = \frac{\epsilon_0 c}{2} (E_{0x}^2 + E_{0y}^2) \vec{u}_z$

\rightsquigarrow notation complexe :

$\langle \mu_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}^* \quad \text{et} \quad \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \frac{\epsilon_0 c}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}^* \vec{u}_z$

2 - Analyse d'une lumière polarisée rectilignement : loi de Malus

① Intensité lumineuse (ou éclaircissement)

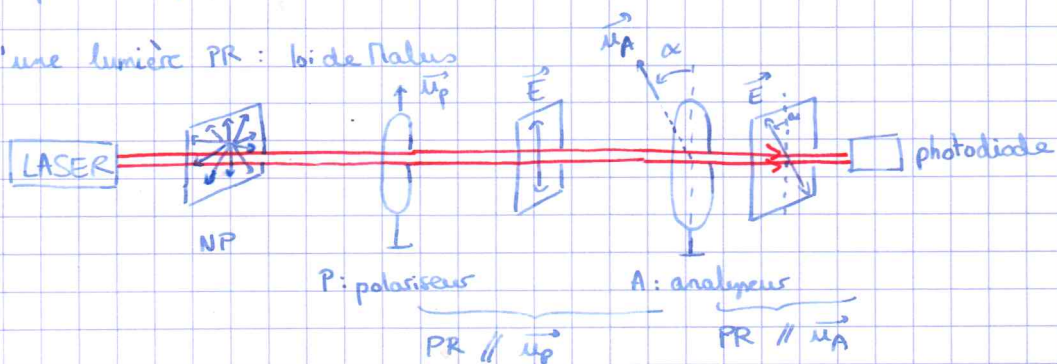
par déf : $I \hat{=} \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle$ (général) en $(W \cdot m^{-2})$

\rightsquigarrow pr 1 OPP(H) : $\langle \vec{\pi} \rangle = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle \vec{u}$

\Rightarrow pr 1 OPP(H) $I = \langle \|\vec{\pi}\| \rangle$

② Analyse d'une lumière PR : loi de Malus

Montage



avant P : $\vec{E}(t) = \begin{pmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ aléatoire (NP)

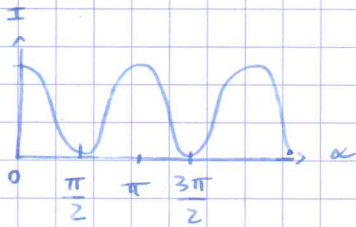
$$I_0 = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle = \epsilon_0 c (\langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle) = 2\epsilon_0 c \langle E_x^2 \rangle$$

Entre P et A : $\vec{E}_1 = (\vec{E}_0 \cdot \vec{u}_p) \vec{u}_p = E_x(t) \vec{u}_p$ PR // \vec{u}_x

$$I_1 = \epsilon_0 c \langle E_1^2 \rangle = \epsilon_0 c \langle E_x^2 \rangle = \frac{I_0}{2}$$

Après A : $\vec{E}_2 = (\vec{E}_1 \cdot \vec{u}_A) \vec{u}_A = (E_x(t) \vec{u}_x \cdot \vec{u}_A) \vec{u}_A = E_x(t) \cos \alpha \vec{u}_A$ (PR // \vec{u}_A)

$$I_2 = \epsilon_0 c \langle E_2^2 \rangle = \epsilon_0 c \langle E_x^2(t) \cos^2 \alpha \rangle = I_1 \cos^2 \alpha$$
 loi de Malus *



3- Onde ou corpuscule ?

Qualité onde corpuscule

ONDE

$$\begin{cases} \omega = 2\pi\nu \\ \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} \end{cases}$$

PARTICULE = photon

$$\begin{cases} E = h\nu = \hbar\omega \\ \vec{p} = \hbar\vec{k} = \frac{h}{\lambda} \vec{u} \end{cases} \text{ relations de Planck-Einstein}$$

$$\hbar = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

Photon: $m=0 \Leftrightarrow v=c$

$$E = p \cdot c \Rightarrow p = \frac{h\nu}{c}$$

Laser de puissance $P = 1 \text{ mW}$
 \hookrightarrow He-Ne rouge : $\lambda = 652 \text{ nm}$



$$I = \langle \|\vec{u}\|^2 \rangle = \frac{P}{S} = 300 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$$

Q: débit de photons associés ?

pd dt : $\delta E = I \cdot S \delta t = P \delta t$

et $\delta E = \underbrace{SN}_{\text{nombre de photons traversant } S \text{ pdt } dt} \times h\nu$

nombre de photons traversant S pdt dt

$$\Rightarrow \frac{SN}{dt} = \frac{P}{h\nu} = \frac{P\lambda}{hc} \quad \text{A.U.} \quad \frac{SN}{dt} \approx 3 \cdot 10^{15} \text{ photons/s}$$

4 - Quelques ordres de grandeur

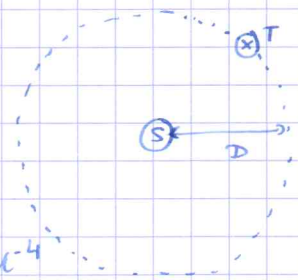
⊙ Lien entre l'ampl. des champs et I ? (OPPH)

$$P = I \times S = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{OPP}}}{E_0 c} \langle E^2 \rangle S = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{OPPH}}}{E_0 c} \frac{E_0^2}{2} S \Rightarrow \begin{cases} E_0 = \sqrt{\frac{2P}{E_0 c S}} = \sqrt{\frac{2\mu_0 c P}{S}} \\ B_0 = \frac{E_0}{c} \end{cases}$$

⊙ LASER $\left\{ \begin{array}{l} P = 1 \text{ mW} \\ r = 1 \text{ mm} \end{array} \right. \Rightarrow I \approx 300 \text{ W.m}^{-2} \Rightarrow \begin{cases} E_0 = \sqrt{2 \times 377 \times 300} \approx 500 \text{ V.m}^{-1} \\ B_0 = 2 \mu\text{T} \end{cases}$

⊙ Soleil:

$R_s \approx 7 \cdot 10^5 \text{ km}$
 $D \approx 150 \cdot 10^6 \text{ km}$
 $T_s \approx 5800 \text{ K}$



Loi de Stefan : corps noir: $\frac{\delta P}{dS} = \sigma T_s^4$

$$P = \sigma T_s^4 \times 4\pi R_s^2 = \langle |\vec{\Pi}| \rangle \times 4\pi D^2$$

$$\Rightarrow \langle |\vec{\Pi}| \rangle = \sigma T_s^4 \left(\frac{R_s}{D}\right)^2 \approx 1,4 \text{ kW.m}^{-2}$$

i.e. $\begin{cases} E_0 \approx 1 \text{ kV.m}^{-1} \\ B_0 \approx 3 \mu\text{T} \end{cases}$

$\sigma \approx 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$
 cte de Stefan-Boltzmann

⊙ Téléphonie mobile

→ antenne relais

$P \sim 100 \text{ W}$
 \hookrightarrow à 10 m: $\langle \Pi \rangle = \frac{P}{4\pi d^2} = \frac{100}{2 \cdot 2 \cdot 100} = 80 \text{ mW.m}^{-2}$

→ téléphone portable

$P \sim 1 \text{ W}$
 \hookrightarrow à 10 cm $\langle \Pi \rangle = 8 \text{ W.m}^{-2}$