

PO5: ONDES EM DANS LES PLASMAS - EFFET DE PEAU DANS LES METAUX

milieux conducteurs

Plasmas

Gas partiellement ou totalement ionisé

- électrons: $-e, m, n^-$
- cations: $+e, M, n^+$

ex: ionosphère (60km → 800km d'alt.)

$$n^+ \approx n^- = 10^{10} \text{ à } 10^{12} \text{ m}^{-3}$$

métaux

réseau cristallin / cationique baignant dans une mer d'électrons de conduction

- e^- libres: $-e, m, n^-$
- cations: $+e, M, n^+$

$$n^+ = n^- \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$$

I - Modèle de la conductivité complexe des plasmas peu denses

1 - Le modèle

a) hypothèses

① $\frac{M_p}{m_e} \approx 6\pi^2 \approx 2 \cdot 10^3 \gg 1$

$$\left\| \frac{d\vec{v}^+}{dt} \right\| \approx \frac{m_e}{M_i} \ll 1$$

⇒ ions fixes

② milieu localement neutre: $n^+ = n^- = n$

③ e^- classiques, i.e. non relativistes: $v_e \ll c$

$$\vec{F}_{\text{Lor}} = -e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$[\vec{E}, \vec{B}]$ d'onde interagissant avec le milieu

$$\frac{\|e\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|e\vec{E}\|} \approx \frac{vB}{E} = \frac{v}{c} \ll 1$$

milieu dilué + OPP

④ Processus dissipatifs (collisions) modélisés

via: $\vec{f} = -\frac{m\vec{v}}{\tau}$ → tps de collision

(b) Conductivité complexe

① PFD d' $1e^-$: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau}$

hypo: OPPH $[\vec{E}, \vec{B}] \propto e^{i\omega t}$

$$\vec{v} \propto e^{i\omega t} \Rightarrow \left(j\omega m + \frac{m}{\tau} \right) \vec{v} = -e\vec{E} \Rightarrow \vec{v} = -\frac{e\tau\vec{E}}{m} \frac{1}{1+j\omega\tau}$$

② conductivité

$$\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2\tau\vec{E}}{m(1+j\omega\tau)} = \underline{\underline{\sigma(\omega)}} \vec{E} \quad \text{où} \quad \underline{\underline{\sigma(\omega)}} = \frac{\sigma_0}{1+j\omega\tau}$$

$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$ cond. stat

2 - Cas d'un plasma dilué

↳ collisions très rares : $\tau \gg T$ i.e. $\omega \tau \gg 1$

$$\underline{\sigma}(\omega) = -j \frac{\sigma_0}{\omega \tau} = -j \frac{ne^2 \tau}{\omega m} \Rightarrow \underline{\sigma}(\omega) = -j \frac{ne^2}{m \omega} \begin{array}{l} \text{imaginaire pur} \\ \text{indép de } \tau \end{array}$$

⊗ Puissance échangée entre le champ et le plasma

$$\langle p_{\text{tot}} \rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (\vec{j} \cdot \vec{E}^*) = \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}^*}{2} \text{Re}(\underline{\sigma})$$

→ aucune puissance n'est échangée entre l'onde et le plasma (onde pas absorbée par le plasma)

II - Propagation d'1 Oém PPH dans un plasma dilué

1 - Neutralité locale - Pulsation plasma

$$\text{⊗ } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \xrightarrow{\text{RSP}} j \omega \rho + \underline{\sigma}(\omega) \text{div } \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \rho \left[\frac{\underline{\sigma}(\omega)}{\epsilon_0} + j \omega \right] = 0 \text{ or } \underline{\sigma}(\omega) \approx -j \frac{ne^2}{m \omega}$$

$$\text{donc } j \epsilon \left[\omega - \frac{ne^2}{m \epsilon_0 \omega} \right] = j \omega \rho \left[1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2} \right] = 0$$

Par définition:

$$\omega_p^2 \hat{=} \frac{ne^2}{\epsilon_0 m}$$

pulsation plasma

(i) $\omega = \omega_p$ il est possible que $\rho(\omega = \omega_p) \neq 0$
↳ plasma a priori neutre localement.

(ii) $\omega \neq \omega_p$ $\rho(\omega \neq \omega_p) = 0$: plasma localement neutre

• on fait cette hypothèse : $\text{div } \vec{E} = 0$ ds le plasma

OG: → ionosphère : $n \sim 10^{10}$ à 10^{12} m^{-3}

$$n = 10^{11} \text{ m}^{-3} : \omega_p = \sqrt{\frac{10^{12} \times 1,6^2 \cdot 10^{-38}}{9 \cdot 10^{-12} \cdot 9 \cdot 10^{-31}}} = \sqrt{\frac{1}{30} \cdot 10^{17}} \neq 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\rightarrow f_p \neq 10 \text{ MHz}$$

$$n = 10^{10} \text{ m}^{-3} \quad f_p \neq 1 \text{ MHz}$$

2 - Equation de propagation linéaire d'une onde harmonique

⊗ Maxwell : $\text{div } \vec{E} = 0$ $\text{div } \vec{B} = 0$

$$(\omega \neq \omega_p) \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left[\underline{\sigma} \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

$$\rightarrow \text{rot} (\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \left[\underline{\sigma} \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \right) \quad \text{donc } \mu_0 \left(\underline{\sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) = \Delta \vec{E}$$

$$-j \frac{ne^2}{m \omega} \hat{=} \frac{ne^2}{m} \times \frac{1}{j \omega}$$

$$\frac{m\omega_0^2}{m} \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \omega_p^2 \vec{E} = c^2 \Delta \vec{E}} \quad \text{EDP linéaire}$$

3. Relation de dispersion des OPPH*

$$-\omega^2 \vec{E} + \omega_p^2 \vec{E} = c^2 (-\underline{k}^2 \vec{E})$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

Klein-Gordon

solutions
 $\vec{E} \propto e^{j(\omega t - \underline{k} \cdot \vec{r})}$
 $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ $\underline{k} = \frac{\omega}{c} \underline{u}$

4. Structure des OPPH*

⊙ Caractère TEM: $\text{div } \vec{E} = 0 = -j \underline{k} \cdot \vec{E} = -j \underline{k} \cdot \underline{u} \cdot \vec{E}$

donc $\text{Re}(\underline{u} \cdot \vec{E} = 0) \Rightarrow \underline{u} \cdot \vec{E} = 0$

$\vec{E} \perp \underline{u}$ (TE)

de même $\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} \perp \underline{u}$ (TM)

⊙ Relation de structure

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{i.e. } -j \underline{k} \wedge \vec{E} = -j \omega \vec{B}$$

$[\underline{u}, \vec{E}, \vec{B}]$ trièdre \perp mais non direct
 a priori (\vec{B} et \vec{E} a priori déphasés)

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\underline{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

5. Domaine de transparence HF: $f > f_p$

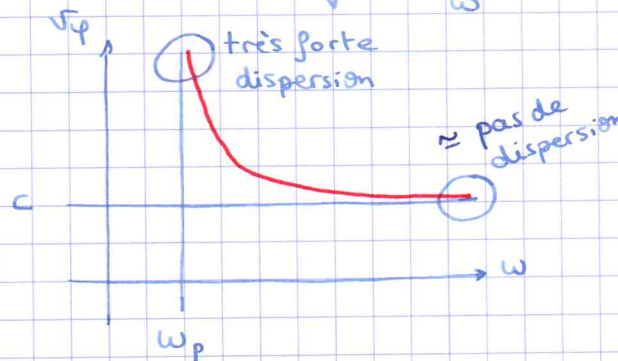
(a) Dispersion et vitesse de phase

$f > f_p$ i.e. $\omega > \omega_p$ donc $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} > 0 \Rightarrow \underline{k} \in \mathbb{R}$

donc $k = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$

propa selon $+\underline{u}$
 $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$
 propa selon $-\underline{u}$

⊙ $v_p(\omega) \hat{=} \frac{\omega}{k(\omega)} = \pm \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$



(b) Expression de \vec{E} - Indice de réfraction

→ Hypos

- $\underline{u} = \underline{u}_z$
- \vec{E} PR $\parallel \underline{u}_x$ (TE)

$$\vec{E} = E_0 \underline{u}_x e^{j(\omega t - kz)}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - k(\omega)z) \underline{u}_x$$

Le milieu est donc transparent au dessus de f_p - propagation sans atténuation (mais avec dispersion)

$$\text{ou } \vec{E}(z, t) = E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v_p(\omega)}\right)\right] \underline{u}_x$$

Def: $n(\omega) \hat{=} \frac{c}{v_p(\omega)}$ ici $n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ $\omega > \omega_p$

(c) Structure et champ \vec{B}

⊙ onde TEM

⊙ $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \underset{\text{ici}}{=} \frac{k(\omega)}{\omega} \vec{u} \wedge \vec{E} \quad \vec{B} = \frac{n(\omega)}{c} (\vec{u} \wedge \vec{E})$

$\Rightarrow \vec{B} = n(\omega) \left(\frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} \right)$

$\frac{\omega}{k} = v_{\varphi} = \frac{c}{n}$

Pr $\omega > \omega_p$, $[\vec{u}, \vec{E}, \vec{B}] \perp$ direct

⊙ $\vec{B}(z,t) = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$

(d) Vecteur de Poynting

$\vec{\Pi}(z,t) = n(\omega) \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z$

→ l'énergie transportée par l'OPPH se propage à v_{φ} .

⊙ $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{n(\omega) E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z = n(\omega) \underbrace{\frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}}_2 \vec{u}_z \quad \parallel + \vec{u}_z : \text{transport d'énergie selon } + \vec{u}_z$
 $\parallel \Pi_{\text{vide}} \parallel$

(e) Propagation d'un paquet d'onde en HF ds 1 plasma dilué : vitesse de groupe

⊙ 1 OPPH n'existe pas (éternelle, énergie ∞ , $v_{\varphi} > c$, ...)

→ 1 PO : superposition continue d'une infinité d'OPPH de $\begin{cases} \omega \in [\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}] \\ k \in [k_0 - \frac{\Delta k}{2}, k_0 + \frac{\Delta k}{2}] \end{cases}$

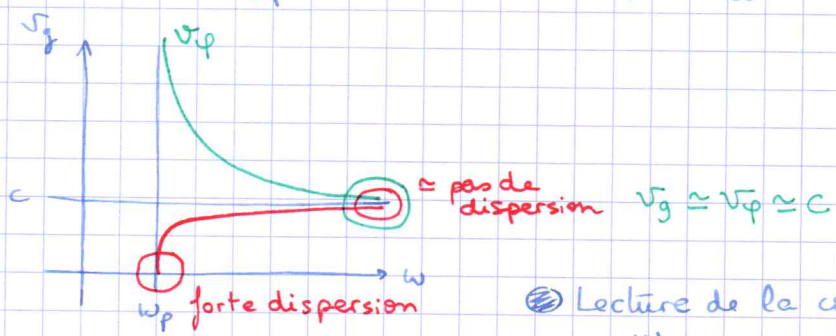
$v_g(\text{POZ}) : v_g \hat{=} \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0}$

$\Delta\omega \ll \omega_0$ et $\Delta k \ll k_0$

ici : $\underline{k} = k = k' \in \mathbb{R}$

$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \rightarrow 2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$

$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_{\varphi}} \Rightarrow v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad \omega > \omega_p$



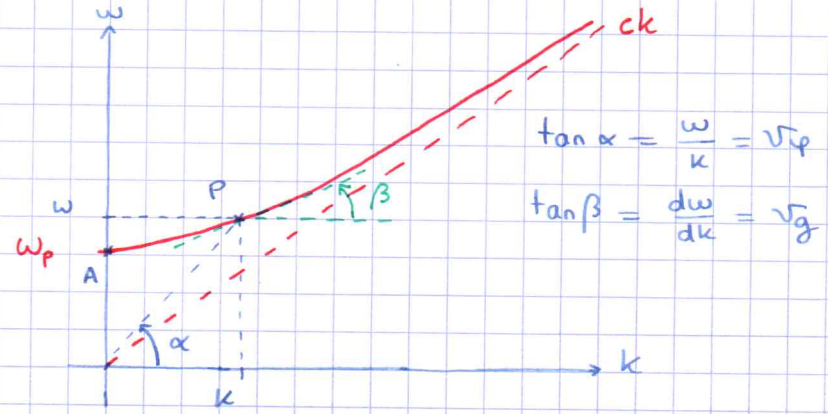
⊙ Lecture de la courbe $\omega(k)$

$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \Rightarrow \omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$

$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}$

$k \rightarrow 0 : \alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0 \Rightarrow v_{\varphi} \rightarrow \infty, v_g \rightarrow 0$

$ck \gg \omega : \tan \alpha \approx \tan \beta = c$



6- Domaine opaque (réactif) basse fréquence : $f < f_p$

(a) Atténuation sans propagation : onde évanescente

$$\textcircled{1} \omega < \omega_p \rightarrow \underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} < 0$$

$$\Rightarrow \underline{k} \in i\mathbb{R} : \underline{k}^2 = -\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2} \Rightarrow \underline{k} = \pm j \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$$

Posons $\delta(\omega) \hat{=} \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$ $\underline{k}(\omega) = \pm \frac{j}{\delta(\omega)}$

$\textcircled{2}$ Expression de \vec{E} ?

$$\begin{aligned} \vec{E}(z,t) &= \vec{\alpha} e^{j(\omega t - \frac{j}{\delta} z)} + \vec{\beta} e^{j(\omega t - (-\frac{j}{\delta}) z)} \\ &= \vec{\alpha} e^{z/\delta} e^{j\omega t} + \vec{\beta} e^{-z/\delta} e^{j\omega t} \end{aligned}$$

$\textcircled{3}$ Hypo : sce en $z=0$ et plasma semi ∞ : $z \in [0, +\infty[$

donc on pose $\vec{\alpha} = \vec{0}$ (\vec{E} fini)

donc $\vec{E}(z,t) = \vec{\beta} e^{-z/\delta} e^{j\omega t}$

\rightarrow pas de propagation

+ et z découplés

or $\vec{E}(0,t) = E_0 \cos \omega t \vec{u}_x \Rightarrow \vec{\beta} = E_0 \vec{u}_x$

\rightarrow atténuation : $e^{-z/\delta}$
sur distance carac

$$\Rightarrow \vec{E}(z,t) = E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t) \vec{u}_x \quad \omega < \omega_p$$

onde stationnaire atténuée =
onde évanescente

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$$

(b) Champ magnétique

$$\vec{B} = \frac{\underline{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \text{ en } \mathbb{C} !$$

$$\begin{cases} \underline{k} = k \vec{u}_z = -\frac{j}{\delta} \vec{u}_z \\ \vec{E} = E_0 e^{-z/\delta} e^{j\omega t} \vec{u}_x \end{cases}$$

$$\vec{B} = -\frac{j E_0}{\omega \delta} e^{-z/\delta} e^{j\omega t} \vec{u}_y$$

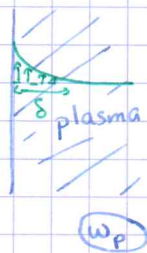
$$= \frac{E_0}{\omega \delta} e^{-z/\delta} e^{j(\omega t - \pi/2)} \vec{u}_y$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} e^{-z/\delta} \sin \omega t \vec{u}_y \quad \vec{B} \text{ et } \vec{E} \text{ en quadrature}$$

(c) Phénomène de réflexion totale

Que devient l'énergie apportée par l'onde incidente ?

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}^*}{\mu_0} \right)$$



Transmission à travers le plasma ?

\Downarrow

NON

$$= \frac{1}{2} \text{Re} \left[E_0 e^{-z/\delta} e^{j\omega t} \vec{u}_x \wedge \left(\frac{j E_0}{\mu_0 \omega \delta} e^{-z/\delta} e^{j\omega t} \vec{u}_y \right) \right]$$

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{E_0^2}{2 \mu_0 \omega \delta} e^{-2z/\delta} \times \underbrace{\text{Re}[j]}_0 \vec{u}_z \Rightarrow \langle \vec{\Pi}_t \rangle = \vec{0}$$

L'onde évanescente ne transporte pas d'énergie

④ Absorption par le plasma ?

$$\langle \rho_{vol} \rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\underline{\sigma} \underline{E} \cdot \underline{E}^* \right] = \frac{\epsilon_0^2}{2} e^{-2z/\delta} \text{Re} \left(\frac{\underline{\sigma}}{\epsilon_0} \right) = 0$$

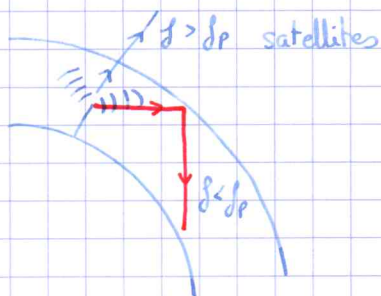
$\epsilon_0 \in i\mathbb{R}$

⇒ ni transmission, ni absorption :

réflexion totale pour $\omega < \omega_p$ plasma = miroir en bf.

7. Télécommunications et ionosphère

④ n de 10^{10} à 10^{12} m^{-3} ⇒ $f_p \in [1 \text{ MHz}, 10 \text{ MHz}]$



III - Effet de peau dans les métaux (à basse fréquence)

1 - Conductivité d'un métal à BF: la loi d'Ohm retrouvée

④ Modèle de $\underline{\sigma}(\omega)$: $\vec{j} = \underline{\sigma}(\omega) \vec{E}$ où $\underline{\sigma}(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + j\omega\tau}$ $\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$

Métal: $\tau \sim 10^{-14} \text{ s}$ (cuivre) (car $\sigma_{cu} \# 6 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$)
 $\left(\begin{array}{l} n \# 10^{29} \text{ m}^{-3} \\ m \# 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \end{array} \right)$

④ Domaine BF: $\omega\tau \ll 1$ i.e. $f \ll \frac{1}{2\pi\tau}$

concerne toutes les ondes hertziennes

i.e. $f \ll 99 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$

alors $\underline{\sigma}(\omega) \approx \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$ réelle > 0 donc $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$ loi d'Ohm
 valable pr $f \lesssim 1 \text{ THz}$
 ↳ cf. Drude

2 - Neutralité des métaux

Hypo: en 1 pt \vec{r} du métal, $\rho(\vec{r}, t=0) = \rho_0(\vec{r}) \neq 0$: excès de charge local initial

Q: tps de relaxation τ_r de cet excès de charge ?

Conservation de la charge: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$ $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sigma_0 \text{div } \vec{E} = 0$

⇒ $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t) = 0$

$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) e^{-t/\tau_r}$ $\tau_r = \frac{\epsilon_0}{\sigma_0} \# \frac{9 \cdot 10^{-12}}{6 \cdot 10^7} \# 10^{-19} \text{ s}!$

donc en "BF" $T \gg \tau \gg \tau_r$

($f \lesssim 10^{12} \text{ Hz}$)

$\hat{1}$
 10^{-14} s $\hat{1}$
 10^{-19} s

→ retour à la neutralité quasi instantané
 ⇒ les métaux sont supposés neutres localement.

3 - ARQS magnétique dans les métaux ?

→ MA : $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

ARQS mag ?

$$\frac{\|\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\vec{j}\|} = \frac{\|\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\sigma_0 \vec{E}\|} = \frac{\epsilon_0 \omega E_0}{\sigma_0 E_0} = \omega \tau_r \ll 10^{-5} \ll 1$$

Conclusion : $\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma_0 \vec{E}}$ dans tout le domaine hertzien

→ conséquence : $\text{div } \vec{j} = 0$: \vec{j} est à flux conservatif

↳ loi des nœuds OK jusqu'à $f \sim 10^{12}$ Hz

4 - Equations de diffusion

$$\left[\begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = 0 \qquad \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \sigma_0 \vec{E} \end{array} \right]$$

② $\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}$

$$\begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) \\ -\mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \quad \text{donc} \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma_0} \Delta \vec{E} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma_0} \Delta \vec{B} \end{array} \right] \quad \text{Dem} = \frac{1}{\mu_0 \sigma_0} \text{ en } m^2 \cdot s^{-1}$$

OG : Cu : $\text{Dem} \approx 1,5 \cdot 10^{-2} m^2 \cdot s^{-1}$

Equations de diffusion (linéaire)

5 - Solution en OPPH* - Relation de dispersion - Effet de peau

(a) Relation de dispersion d'1 Oem PPH*

② Linéarité de l'équation de diffusion → solutions élém. harmoniques en OPPH*

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) \end{array} \right\} \propto e^{j(\omega t - \underline{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{où } \underline{k} = \underline{k} \cdot \underline{u}$$

② relation de dispersion $j\omega \vec{E} = \frac{1}{\mu_0 \sigma_0} (-\underline{k}^2 \vec{E})$ donc $\underline{k}^2 = -j\omega \mu_0 \sigma_0$ R.D.

donc $\underline{k}^2 = e^{-j\frac{\pi}{2}} \omega \mu_0 \sigma_0 \Rightarrow \underline{k} = \pm e^{-j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\mu_0 \sigma_0 \omega}$

$\underline{k} = \pm (1-j) \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{2}}$

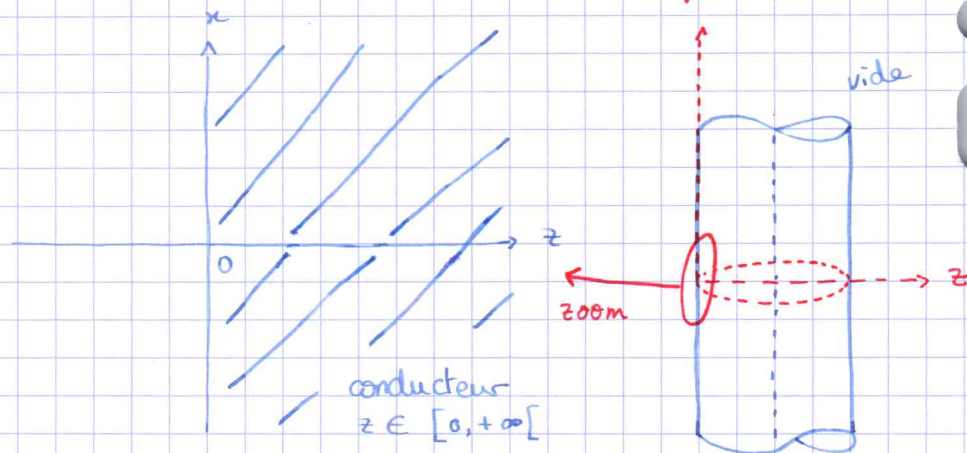
on pose $\delta(\omega) \hat{=} \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}}$ profondeur / épaisseur de peau

donc $\underline{k} = \pm \frac{1-j}{\delta}$

NB: Ondes thermiques $S(\omega) = \sqrt{\frac{2Dth}{\omega}}$

(b) Effet de peau dans 1 conducteur semi-infini

① Géométrie :



C.L. en $z=0$:

$$\vec{E}(0,t) = E_0 \cos \omega t \vec{u}_x$$

② Champ \vec{E} :

$$\vec{E} = \vec{\alpha} e^{j(\omega t - \frac{1-j}{\delta} z)} + \beta e^{j(\omega t + \frac{1-j}{\delta} z)}$$

$\propto e^{-z/\delta}$ $\propto e^{+z/\delta} \rightarrow \text{DV quand } z \rightarrow \infty$

CL en $z=0$: $\vec{E}(0,t) = E_0 e^{j\omega t} \vec{u}_x = \vec{\alpha} e^{j\omega t}$

donc $\vec{E}(z,t) = E_0 e^{-z/\delta} e^{j(\omega t - z/\delta)} \vec{u}_x$

$$\Rightarrow \vec{E}(z,t) = E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \vec{u}_x$$

③ $\vec{j}(z,t) = \sigma_0 \vec{E} = \sigma_0 E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta}) \vec{u}_x$

④ \vec{B} ? OPPH* donc $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ $\vec{k} = \frac{1-j}{\delta} \vec{u}_z$

$$\vec{B} = \frac{1-j}{\omega \delta} E_0 e^{-z/\delta} e^{j(\omega t - z/\delta)} \vec{u}_y$$

donc $\vec{B}(z,t) = \frac{\sqrt{2} E_0}{\omega \delta} e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta - \frac{\pi}{4}) \vec{u}_y$

(c) Discussion physique

① Facteur d'atténuation : $e^{-z/\delta}$ → décroissance exp. des chps et de \vec{j} mn distance carac δ

Localisation de \vec{E} , \vec{B} et \vec{j} au voisinage de la surface du métal, dans une "peau" d'épaisseur typique δ .

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

$\propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$
 $\propto \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}}$

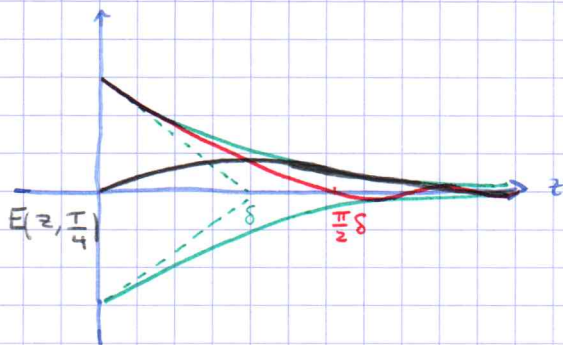
⇓
effet de peau + sensible
qd : $\omega \uparrow$ et $\sigma_0 \uparrow$

6. Facteur de propagation ?

$$\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) = \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{v_p}\right)\right)$$

$$v_p(\omega) = \omega \delta(\omega) = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \sigma_0}}$$

forte dispersion



$$\vec{E}(z, t=0) \propto e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta}\right)$$

$$E(z, t = \frac{T}{4}) = e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{2}\right)$$

6. Interprétation énergétique de l'atténuation : phénomène d'absorption.

(a) Vecteur de Poynting moyen

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}^*}{\mu_0} \right)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} E_0 e^{-z/\delta} \times \frac{\sqrt{2} E_0}{\omega \delta} e^{-z/\delta} \text{Re} \left[e^{j(\omega t - z/\delta)} \times e^{-j(\omega t - z/\delta - \pi/4)} \right] \vec{u}_z$$

$$e^{j\pi/4} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

$$\text{donc } \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0}{2\mu_0 \omega \delta} e^{-z/\delta} \vec{u}_z$$

(b) L'origine γ de l'atténuation

$$\langle p_{\text{vol}} \rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\sigma_0 \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{E}^*}_{E_0^2} \right)$$

$$\langle p_{\text{vol}} \rangle = \frac{\sigma_0}{2} E_0^2 > 0$$

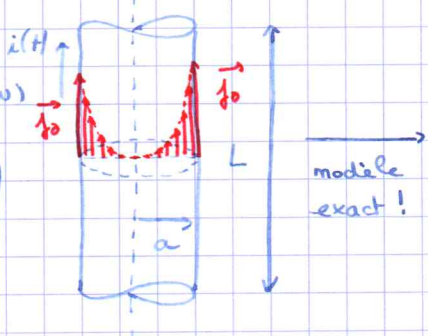
atténuation due à l'absorption de l'énergie du champ par le métal.

→ effet Joule

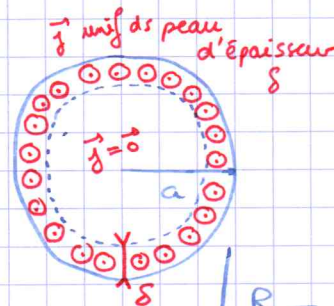
7. Ordres de grandeur et conséquences pratiques

Hypo:

$a \gg \delta(\omega)$
(câble avec épais)



modèle exact!



$a \gg \delta$

$$R = \frac{L}{\sigma_0 S_{\text{mt}}} = \frac{L}{\sigma_0 2\pi a \delta}$$

$$R = \frac{L}{\sigma_0 2\pi a} \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{2}} \propto \sqrt{\frac{\omega}{\sigma_0}}$$

$R \uparrow$ qd $\omega \uparrow \Rightarrow$ pertes en ligne \uparrow aux HF
 $R \downarrow$ qd $\sigma_0 \uparrow$

(b) Effet de peau ds Cu pr \neq fréquences

• $f = 50 \text{ Hz}$ $\delta = \sqrt{\frac{2}{12 \cdot 10^7 \cdot 6 \cdot 10^8 \cdot 100 \times 3}} \approx 1 \text{ cm}$

→ câbles fins ($a \approx 99 \text{ mm}$) : $\delta \gg a$: quasiment pas d'effet de peau
→ câbles épais ($a \approx 99 \text{ cm}$) : $\delta \lesssim a$: effet de peau sensible

$$\textcircled{a} f = 1 \text{ kHz}$$

↓

$$f = 100 \text{ kHz}$$

$$\delta \approx 2 \text{ mm}$$

$$\delta \approx 0,2 \text{ mm}$$

$$\textcircled{a} f = 1 \text{ MHz}$$

↓

$$100 \text{ MHz}$$

$$\delta \approx 70 \mu\text{m}$$

$$\delta \approx 7 \mu\text{m}$$

fort effet
de peau