

ONDES EM ET INTERFACES REFLEXION METALLIQUE

I - Le modèle du conducteur parfait

1 - Déf et conséquences

(a) Définition du modèle

• Dans 1 métal BF ($\omega L \ll 1$) : atténuation des champs sur $\delta(\omega)$ \rightarrow loc. au voisinage de la surface
courants

\hookrightarrow à assez HF pour que $\delta(\omega) \ll L$

i.e. $f \gg \frac{1}{\pi \mu_0 \sigma_0 L^2} \neq \frac{4 \cdot 10^3}{L^2}$ pr Cu ex: $L = 1 \text{ mm}$
 $f \gg 4 \text{ kHz}$

$\delta(\omega) \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$

• Modèle du CP : on pose $\delta(\omega) = 0 \Leftrightarrow \sigma_0 \rightarrow +\infty$

(b) Conséquences : $\text{rot } \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma_0 E^2 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$ en tout pt du CP

• $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \rho = 0$

• $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \langle \vec{B} \rangle_{\text{tps}} = \langle \vec{B}(\vec{r}) \rangle_{\text{tps}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$ en tt pt du CP

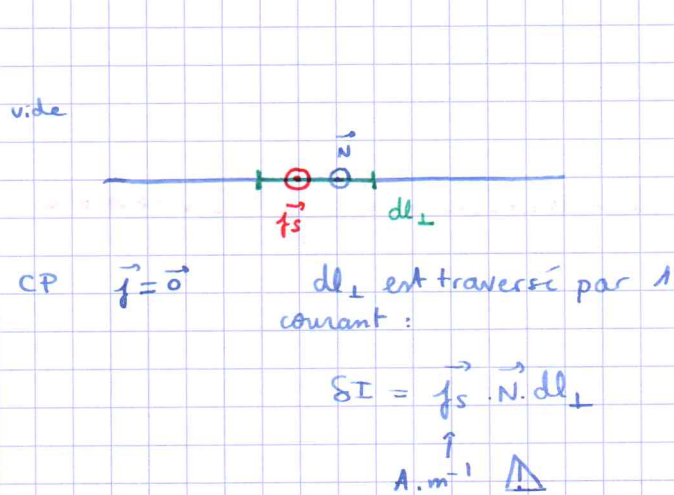
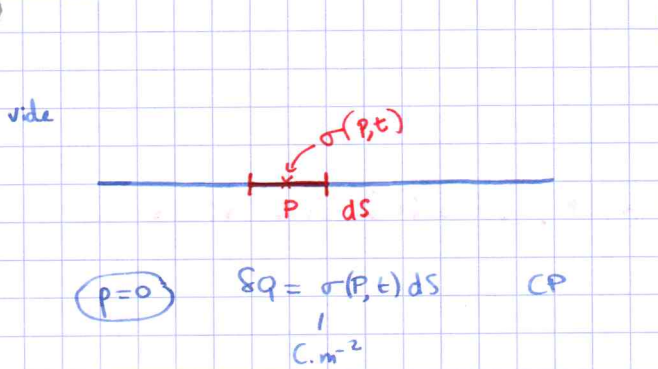
• $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \vec{0} \Rightarrow \vec{j} = \vec{0} \forall p^+ \in \text{CP}$

• $\text{rot } \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$ pas d'effet Joule

(c) Charges et courants surfaciques seulement

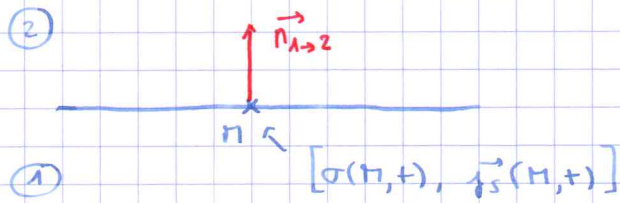
$\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$ à l'int du CP.

\hookrightarrow seul lieu où on peut rencontrer des charges : en surface
courants



2. Conditions de raccordement du champ $[\vec{E}, \vec{B}]$ à la surface d'1 CP.

Donnée : mappe de charges et courants surfaciques (σ, \vec{j}_s)

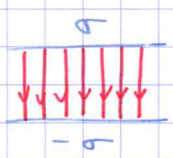


MODÈLE
 ↓
 singularité
 ↓
 on ne peut écrire les eq de Maxwell sur l'interface

Les 4 équations de Maxwell doivent être remplacées au voisinage de l'interface par :

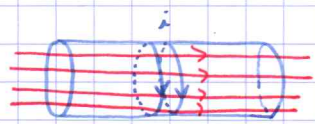
$$\begin{cases} \vec{E}_2(M^+, t) - \vec{E}_1(M^-, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{B}_2(M^+, t) - \vec{B}_1(M^-, t) = \mu_0 \vec{j}_s(M, t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{cases}$$

ex1 condensateur plan



$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

ex2 solénoïde infini



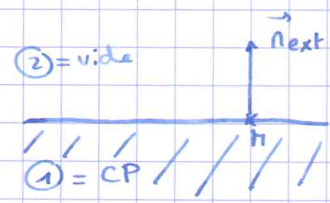
$$\vec{B}_{int} = \mu_0 n i \vec{u}_z$$

$$\vec{j}_s = n i(t) \vec{u}_\theta$$

Champ $[\vec{E}, \vec{B}]$ à la surface d'1 CP

$$\vec{E}(M^+, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{n}^{ext}$$

$$\vec{B}(M^+, t) = \mu_0 \vec{j}_s(M, t) \wedge \vec{n}^{ext}$$



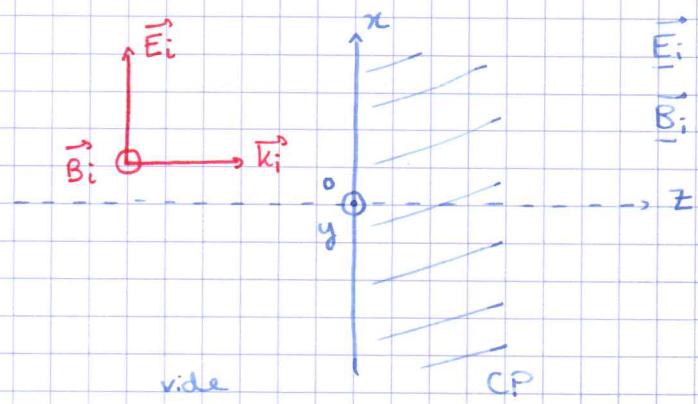
csq: * si on impose $\vec{E} \parallel$ surf. du CP : $\sigma = 0$ et $\vec{E}(M^+, t) = \vec{0}$

* $\vec{B} \perp$: $\vec{j}_s = \vec{0}$ et $\vec{B}(M^+, t) = \vec{0}$

si $\vec{E} \perp$ surf du CP : $\sigma \neq 0$
 si $\vec{B} \parallel$: $\vec{j}_s \neq \vec{0}$

II - Réflexion d'une Oem PPH PR sur un CP, sous incidence normale

1 - Nécessité d'une onde réfléchie



$$\begin{aligned} \vec{E}_i(z < 0, t) &= E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_x \quad (PR \parallel \vec{u}_x) \\ \vec{B}_i &= \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_y \\ \vec{k}_i &= k \vec{u}_z = \frac{\omega}{c} \vec{u}_z \end{aligned}$$

⊗ CL en $z=0^-$: \vec{E} est // $\Rightarrow \vec{E}(0^-, t) = \vec{0}$ or $\vec{E}_i(0^-, t) \neq \vec{0}$!

\rightarrow il faut autre chose: \rightarrow onde réfléchie

2 - Z' onde réfléchie

⊗ c'est une OEm PPH | se propageant selon $-\vec{u}_z$
de puls. ω par linéarité

$$\vec{E}_r(z < 0, t) = \begin{pmatrix} E_{rx} e^{j(\omega t + kz)} \\ E_{ry} e^{j(\omega t + kz)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

⊗ CL en $z=0^-$: $\vec{E}(0^-, t) = \vec{0} = \vec{E}_i(0^-, t) + \vec{E}_r(0^-, t)$

$$\begin{cases} E_0 + E_{rx} = 0 \Rightarrow E_{rx} = -E_0 \\ E_{ry} = 0 \rightarrow \text{l'onde réf. est PR // à } \vec{u}_x \end{cases}$$

donc $\vec{E}_r(z < 0, t) = -E_0 e^{j(\omega t + kz)} \vec{u}_x$

⊗ l'onde réf est 1 OPPH

$$\rightarrow \vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{(-\vec{u}_z)}{c} \wedge \vec{E}_r$$

$$\rightarrow \vec{B}_r(z < 0, t) = + \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t + kz)} \vec{u}_y$$

NB: $\begin{cases} r_E = \frac{E_r(0^-, t)}{E_i(0^-, t)} = -1 \\ r_B = \frac{B_r(0^-, t)}{B_i(0^-, t)} = +1 \end{cases}$

3 - Superposition / Interférence | des 2 ondes incidentes et réfléchie: onde stationnaire

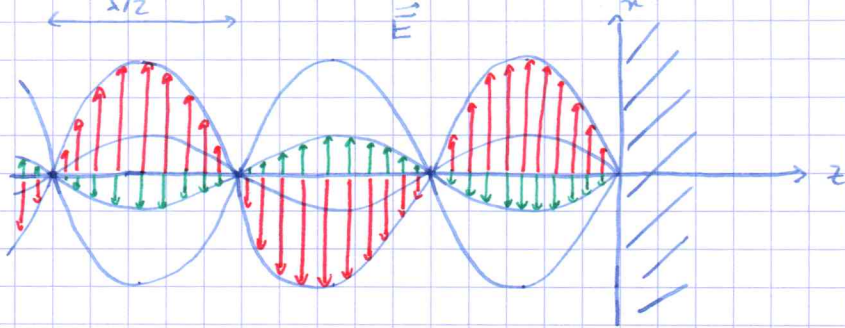
$$\begin{aligned} \vec{E}(z < 0, t) &= \vec{E}_i(z < 0, t) + \vec{E}_r(z < 0, t) \\ &= E_0 e^{j\omega t} \left(e^{-jkz} - e^{jkz} \right) \vec{u}_x \\ &= -2i E_0 \sin kz e^{j\omega t} \vec{u}_x \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{E}(z < 0, t) = 2E_0 \sin kz \sin \omega t \vec{u}_x} \quad \text{OSH}$$

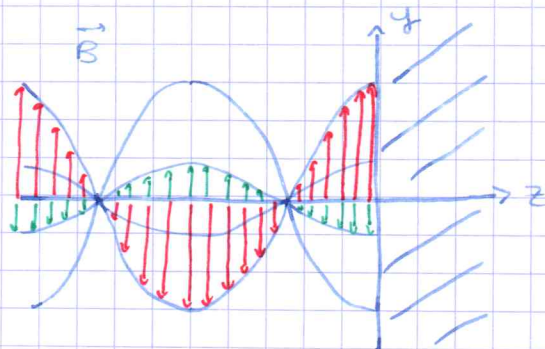
$$\otimes \vec{B}(z < 0, t) = \vec{B}_i(z < 0, t) + \vec{B}_r(z < 0, t) = \frac{E_0}{c} e^{j\omega t} \left(e^{-jkz} + e^{jkz} \right) \vec{u}_y$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{B}(z < 0, t) = \frac{2E_0}{c} \cos kz \cos \omega t \vec{u}_y} \quad \text{OSH en quadrature / à } \vec{E}$$

Conclusion: la superposition de 2 OPPH de \hat{m} fréquence, de \hat{m} amplitude, de sens de propagation opposés = OSH.



1 noeud de \vec{E}
 \downarrow
 1 ventre de \vec{B}



4 - Courants surfaciques

① σ ? : $\vec{E}(0^-, t) = \vec{0} \Rightarrow \sigma = 0$

② \vec{j}_s ? : $\vec{B}(0^-, t) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge (-\vec{u}_z)$

$$\frac{2E_0}{c} \cos \omega t \vec{u}_y = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z = \mu_0 \vec{u}_z \wedge \vec{j}_s$$

$$\Rightarrow \vec{j}_s(t) = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos \omega t \vec{u}_x$$

5 - Aspect énergétique

(a) Coeff. de réflexion en puissance / énergie

$$\begin{cases} \langle \vec{\pi}_i \rangle = \epsilon_0 c \frac{E_0^2}{2} \vec{u}_z & (\text{OPPH}) \\ \langle \vec{\pi}_r \rangle = -\epsilon_0 c \frac{E_0^2}{2} \vec{u}_z \end{cases} \quad R \hat{=} \frac{\langle \|\vec{\pi}_r\| \rangle}{\langle \|\vec{\pi}_i\| \rangle} = 1$$

→ cohérent : pas de pénétration de (\vec{E}, \vec{B}) ds CP + pas d'effet Joule

(b) Onde stationnaire et énergie

$$\langle \vec{\pi}_{\text{tot}} \rangle = \left\langle \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \left\langle \frac{2E_0 \sin kz \sin \omega t}{\mu_0} \times \frac{2E_0 \cos kz \cos \omega t}{c} \right\rangle \vec{u}_z$$

$\propto \sin \omega t \cos \omega t$

$$\Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \vec{0}$$

pas de transport d'énergie em par l'osth.

⊙ Intensité lumineuse :

$$I(z) \hat{=} \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle = \frac{\epsilon_0 c 4E_0^2}{2} \sin^2 kz \propto \sin^2 kz$$

$$\triangle I \neq \langle \|\vec{\pi}\| \rangle$$

pr 1 OSH

→ franges brillantes : $I(z) = I_{max} \Leftrightarrow kz = \frac{\pi}{2} + p\pi$

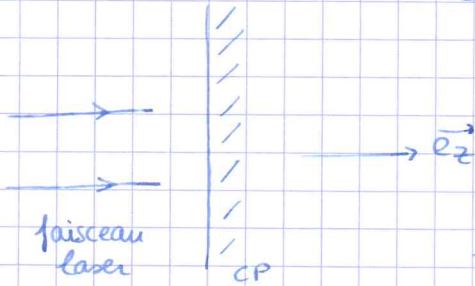
→ franges sombres : $I(z) = I_{min} \Leftrightarrow kz = m\pi$

6. Pression de radiation (HP)

→ réflexion métallique (microsys. actionnés par LASER, queues des comètes)

⊙ situation :

⊙ p^+ de vie corpusculaire : photons incidents



$$\begin{cases} \epsilon_i = \hbar \omega = h\nu \\ \vec{p}_i = \hbar \vec{k}_i = \frac{h}{\lambda} \vec{e}_z = \frac{h\nu}{c} \vec{e}_z \end{cases}$$

flux de photons incidents

$$\frac{SN}{dt} = \frac{P \times \lambda}{hc} = \frac{P}{h\nu} = \frac{I \times S}{h\nu}$$

⊙ A chaque photon incident

↓
1 photon réfléchi : $\vec{p}_r = -\vec{p}_i = -\frac{h\nu}{c} \vec{e}_z$

⇒ var. de la q^{te} de mov du photon

$$\Delta p = \vec{p}_r - \vec{p}_i = -2 \frac{h\nu}{c} \vec{e}_z$$

⊙ Syst : { CP + les SN photons se réfl. sur la CP pdr dt }

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_{CP}(t) + SN \times \frac{h\nu}{c} \vec{e}_z$$

$$\vec{p}(t+dt) = \vec{p}_{CP}(t+dt) + SN \times \left(-\frac{h\nu}{c} \vec{e}_z\right)$$

Hypo: sys. isolé : $\vec{p}(t+dt) = \vec{p}(t)$

$$\vec{p}_{CP}(t+dt) - SN \frac{h\nu}{c} \vec{e}_z = \vec{p}_{CP}(t) + SN \frac{h\nu}{c} \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_{CP}}{dt} = +2 \frac{SN}{dt} \frac{h\nu}{c} \vec{e}_z \quad \text{donc } \vec{F}_{ray \rightarrow CP} = \frac{2IS}{h\nu} \times \frac{h\nu}{c} \vec{e}_z = \left(\frac{2I}{c}\right) \times S \vec{e}_z$$

$$\vec{F}_{ray \rightarrow CP}$$

$$P_{radiation} = \frac{2I}{c}$$

⊙ OF : ⊙ laser de puissance

$$I \# 1 \text{ kW/m}^2 \quad P_{rad} \# 10^5 \text{ Pa}$$

⊙ LHIJ : impulsions de 1,8 MJ sur 4ns $\rightsquigarrow P_{rad} \# 30 \text{ bar}!$

III - Modes propres d'une cavité en 1D

⊙ Cavité 1D :

1 - Recherche des modes propres

(a) \vec{E} et \vec{B} sont tangentiels

$$\text{div } \vec{E} = 0 = \frac{\partial E_z}{\partial z} \Rightarrow E_z = f(t) = 0$$

↑
intervention de z et t simultanément

$$\text{div } \vec{B} = 0 = \frac{\partial B_z}{\partial z} \Rightarrow B_z = g(t) = 0$$

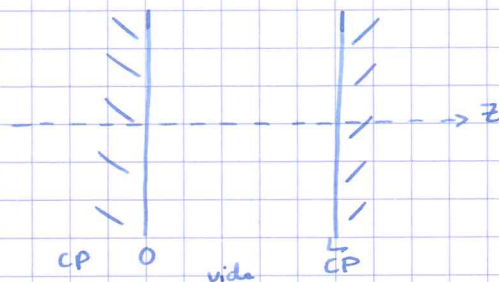
$$\text{donc } \vec{E}(z,t) = \begin{pmatrix} E_x(z,t) \\ E_y(z,t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}(z,t) = \begin{pmatrix} B_x(z,t) \\ B_y(z,t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ par linéarité : on étudie un champ \vec{E}

$$PR \parallel \vec{u}_x$$

$$\vec{E}(z,t) = E(z,t) \vec{u}_x$$



$L_x, L_y \gg L$: pb 1D

(b) Résolution de l'éq. de d'Alembert par séparation des variables

$$c^2 \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \xrightarrow[\vec{u}_x]{\text{selon}} c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

CP : réflexion totale

⇓
apparition par refl. d'OSM

→ cherchons $E(z,t) = f(z)g(t)$ en notation réelle

$$c^2 f''(z)g(t) = f(z)g''(t)$$

$$\frac{f''(z)}{f(z)} = \frac{g''(t)}{c^2 g(t)} = \text{cte} \quad \forall t, \forall z \in]0, L[$$

$$\rightsquigarrow f''(z) = \pm k^2 f(z)$$

⊙ si $f''(z) = +k^2 f(z)$ alors $f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$ (ou $f(z) = Az + B$ si $k=0$)

CL : comme $\vec{E} \parallel \text{plans CP}$, $\vec{E}(z=0,t) = \vec{E}(z=L,t) = \vec{0}$

$$\Rightarrow f(0) = f(L) = 0$$

→ alors $f(z) = 0$! sans intérêt

⊙ si $f''(z) = -k^2 f(z)$ ($k \neq 0$)

$$\text{alors } f(z) = A \cos kz + B \sin(kz)$$

⊙ Pour $g(t)$:

$$\frac{g''(t)}{c^2 g(t)} = -k^2$$

$$g''(t) = -k^2 c^2 g(t) = -\omega^2 g(t)$$

Posons $\omega = ck$

$$\text{donc } g(t) = C \cos(\omega t + \gamma)$$

$$\underline{\underline{CL}} : \vec{E}(z,t) = (A \cos kz + B \sin kz) \cos(\omega t + \gamma) \vec{u}_x \quad \text{OSH}$$

(c) Influence des conditions aux limites : discrétisation des modes propres
 \hookrightarrow 2CL en 1D

⊗ 2CL ($z=0$) $\vec{E}(0,t) = 0 \forall t \Rightarrow A=0 \Rightarrow \vec{E}(z,t) = E_0 \sin kz \cos(\omega t + \varphi) \vec{u}_x$

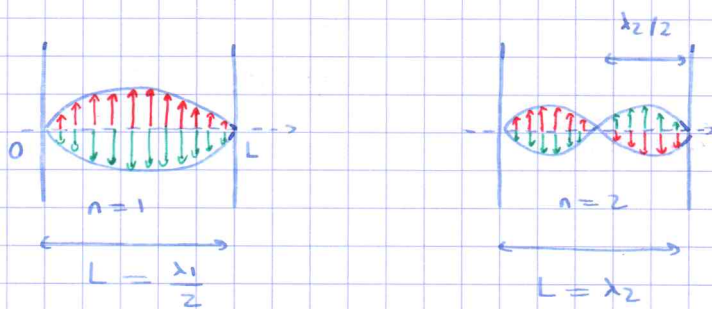
($z=L$) $\vec{E}(L,t) = 0 \forall t \Rightarrow \sin kL = 0$ i.e. $k_n = n \frac{\pi}{L}$ $n \in \mathbb{N}^*$

⊗ pulsations propres : d'Alembert :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= -\omega^2 E \\ c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} &= -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} E c^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

Concl $\vec{E}_n(z,t) = E_{0n} \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t + \varphi_n\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \vec{u}_x$ modes propres
 sol. stationnaires harm. compatibles avec les 2 CL, en régime libre.
 \hookrightarrow fréquences propres : $f_n = n \frac{c}{2L}$

⊗ Allure des modes :



⊗ Solution générale

$$\vec{E}(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{0n} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi c t}{L} + \varphi_n\right) \vec{u}_x + \sum_{p=1}^{\infty} E_{0p} \sin\left(\frac{p\pi z}{L}\right) \cos\left(\frac{p\pi c t}{L} + \varphi_p\right) \vec{u}_y$$

(d) Champ magnétique

\rightarrow on revient à $\vec{E} = E_{0n} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi c t}{L} + \varphi_n\right) \vec{u}_x$

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\parallel \nabla \wedge \vec{E} \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial z} \vec{u}_y = -E_{0n} \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi c t}{L} + \varphi_n\right) \vec{u}_y$

$\Rightarrow \vec{B}_n(z,t) = -\frac{E_{0n}}{c} \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi c t}{L} + \varphi_n\right) \vec{u}_y$

(e) Aspect énergétique

⊗ $\langle \vec{\pi} \rangle_{\text{temp}} = \frac{E_{0n}^2}{\mu_0 c} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \underbrace{\langle \cos\left(\frac{n\pi c t}{L} + \varphi_n\right) \sin\left(\frac{n\pi c t}{L} + \varphi_n\right) \rangle_{\text{temp}}}_{=0} \vec{u}_z$

$\Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \vec{0}$

⊗ $U_e(t) = \iiint_{\text{cavité}} \frac{\epsilon_0 E^2(z,t)}{2} dV = \frac{\epsilon_0 E_{0n}^2}{2} \cos^2\left(\frac{n\pi c t}{L} + \varphi_n\right) \times \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi z}{L}\right) L_x L_y dz$

$U_{\text{elec}}(t) = \frac{\epsilon_0 E_{0n}^2}{2} \underbrace{L L_x L_y}_V \cos^2\left(\frac{n\pi c t}{L} + \varphi_n\right)$

$$\textcircled{2} U_{\text{mag}}(t) = \iiint_{\text{cav.}} \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \dots = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{\text{on}}^2}{4} V \sin^2 \left(\frac{n\pi ct}{L} + \varphi_n \right)$$

$$U_{\text{elec}} + U_{\text{mag}} = \text{cte} \quad \text{conservation de l'énergie}$$

