

# TR1: TRANSPORT DE CHARGE : CONDUCTION ELECTRIQUE

## I) Charges et courants

### 1) Densité volumique de charge $\rho(\vec{r}, t)$

#### (a) Charges discrètes :

⊙ caractère "a-tomique" de la charge : charge élémentaire  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C

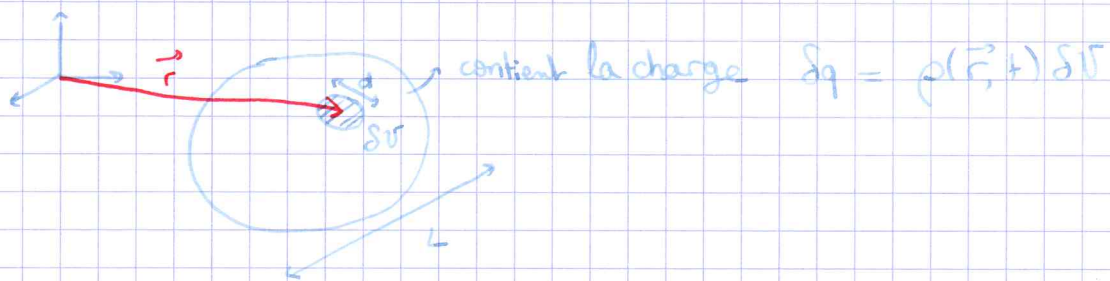
⊙ à l'échelle |micro| : charges discrètes :  $\rightarrow$  électrons :  $-e$   
 $\rightarrow$  protons :  $+e$   
 $\rightarrow$  noyaux :  $+Ze$   
 $\rightarrow$  ions :  $(\text{Ca}^{2+}, \text{Na}^+, \dots)$

#### (b) Echelle mésoscopique : distrib. continue de charge

⊙  $l \ll d \ll L$   
 nano  $\downarrow$   $d \approx 0,1$  à  $1 \mu\text{m}$   $\downarrow$  macro

$\rightarrow$  1 vol.  $\delta V$  mésos contient  $\approx 10^6$  individus  $\rightarrow$  traitement moyen

#### ⊙ densité de charge $\rho(\vec{r}, t)$



#### (c) Métaux, électrolytes, semi-conducteurs

⊙ Métaux : réseau cationique baigné d'une mer d'é. libres  
 $\hookrightarrow (+Ze, n_i)$

neutralité locale :  $\rho = 0$

$$= n_i \times (+Ze) + n_e \times (-e)$$

$$\Rightarrow n_e = Zn_i$$

$\hookrightarrow$  nbre volumiq de cat<sup>+</sup> ( $\text{m}^{-3}$ )  
 $\hookrightarrow (-e, n_e)$   
 $\uparrow$   
 $\text{m}^{-3}$

⊙ ODG : Cuivre : chaque atome Cu libère  $1e^-$  libre  $\Rightarrow$  ions  $\text{Cu}^+$

$$\left. \begin{array}{l} M = 63,6 \text{ g/mol} \\ \mu = 8960 \text{ kg/m}^3 \end{array} \right\} \Rightarrow n_i = \frac{M}{\mu} \times N_A = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$$

$$\Rightarrow n_e = n_i$$

$$\rho_{\text{lib}} = -\rho_{\text{ion}} = -e \times n_e$$

⊙ Electrolyte : ions en sol dilués

ex: sol. de NaCl 0,1 mol.L<sup>-1</sup>

$$n^+ = n^- = c \cdot N_A \times 1000 = 6 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

$$\rho = n^+ e - n^- e = 0$$

$$\rho_{\text{Na}^+} = n^+ e = 10^{27} \text{ C.m}^{-3}$$

⊙ Semi-conducteurs : atomes neutres, atomes ionisés  $\rightarrow n_i, \pm e$   
 $e^-$  libres  $\rightarrow n_e, -e$   
 "trous"  $\rightarrow n_f, +e$

$$\rho = n_i(+e) - n_e e + n_f e$$

(d) Généralisations : dans le matériau,  $\neq$  familles de porteurs de charges  $\rightarrow \neq$  types "k".

$$\rho = \sum_{\neq "k"} n_k q_k$$

2) Courant et densité de courant  $\vec{j}(\vec{r}, t)$

(a) Courant algébrique traversant une surface orientée  
 $\rightarrow$  pdt dt, S est traversée par  $S_q$

Déf: courant : charge algébrique traversant S par unité de temps

$$S_q = i(t) dt \quad i(t) : \text{débit de charge (C.s}^{-1}\text{)}$$

(b) Déf du vecteur densité de courant  $\vec{j}(\vec{r}, t)$

⊙ Vitesse de dérive des porteurs de charge libre

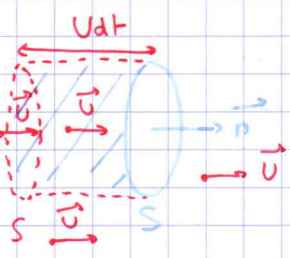
ex: métal:  $e^-$  libres :  $\vec{v}_d$  avec  $\langle n\vec{v}_d \rangle = \vec{0}$  si  $\vec{E} = \vec{0}$   
 $\hookrightarrow$  vit. d't  $e^-$

mais  $\bar{u} = \sqrt{\langle v_d^2 \rangle}$  déf par  $\frac{1}{2} m \bar{u}^2 = \frac{3}{2} k_B T$   

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 300}{9,1 \times 10^{-31}}} \approx 10^5 \text{ m/s}$$

⊙ si  $\vec{E} \neq \vec{0}$   $\langle n\vec{v}_d \rangle = \vec{U} \neq \vec{0}$  ( $U = 99 \times 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$ )

⊙ Modèle 1D, 1 seul type de porteurs libres



$\hookrightarrow n \text{ (m}^{-3}\text{)}$   
 $q_0 \text{ (C)}$   
 $\langle \vec{v}_d \rangle = \vec{U}$  uniforme  $\perp$  à S

Q:  $S_q$  trav' S pdt dt ?

$\delta V$  contient  $n \delta V = n S U dt$  porteurs donc 
$$S_q = n S U dt \times q_0$$
  

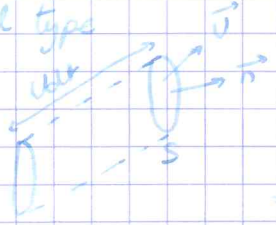
$$= n q_0 U S dt$$
  

$$= n q_0 \vec{U} \cdot (S \vec{n}) dt$$

$$i = n q_0 \vec{U} \cdot S \vec{n} = \vec{j} \cdot S \vec{n} \quad \text{avec } \vec{j} = n q_0 \vec{U}$$

⊙ 3D, 1 seul type

$\vec{U}$  uniforme

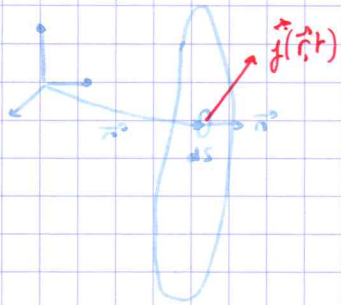


$$S_q = q_0 \times \delta N = q_0 \times n \times \vec{U} \cdot \vec{n} \cdot \delta S dt$$
  

$$= n q_0 \vec{U} \cdot S \vec{n} \cdot dt$$

$$\rightarrow i = \vec{j} \cdot S \vec{n}$$

Def générale de  $\vec{j}(\vec{r}, t)$



à travers  $dS$ :  $di(t) = \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}$

à travers  $S$ :  $i(t) = \iint_S \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} dS$

$[\vec{j}] = A \cdot m^{-2}$

(b) Métaux, électrolytes, semi-conducteurs

⊗ Métaux :  $e^-$  libres

$\hookrightarrow n, -e, \vec{U}$

$\vec{j} = -ne\vec{U}$

OG (Cu) : câble de section  $1mm^2$ ,  $i=1A$

$j = \frac{i}{S} = 10^6 A \cdot m^{-2}$

et  $U = \frac{j}{ne} \approx 10^{-4} m \cdot s^{-1}$

$\ll$  Vag. th.

⊗ Electrolytes

(ex) Pont salin : ions  $K^+$ ,  $NO_3^-$

$n^+, +e, \vec{U}^+$

$n^-, -e, \vec{U}^-$

$\vec{j} = n^+e\vec{U}^+ + n^-(-e)\vec{U}^-$

OG:  $\begin{cases} C = 1 mol \cdot L^{-1} \\ S = 0,5 cm^2 \\ i = 500 mA \end{cases}$

$j = \frac{i}{S} = \frac{0,5}{0,5 \cdot 10^{-4}} = 10^4 A \cdot m^{-2}$

$\|\vec{U}^+\| \approx \|\vec{U}^-\| = \frac{j}{2ne} = \frac{10^4}{2 \times 10^3 \times 6 \times 10^{23} \times 1,6 \times 10^{-19}}$

$v_{th} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 440 m/s$

$\# 5 \cdot 10^5 m/s$

$n = C \times N_A \times 1000$   
 $\frac{1}{mol^{-1}}$

⊗ Semi-conducteurs :  $\vec{j} = n_f e \vec{U}_f + n_e (-e) \vec{U}_e$

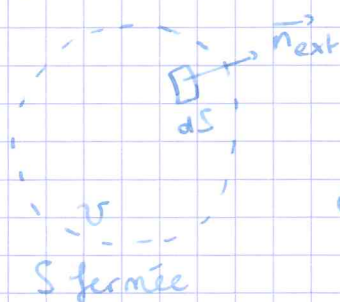
(d) Généralisation : famille "k" de porteurs libres

$\vec{j} = \sum_{\substack{\neq \text{familles} \\ "k"}} n_k q_k \vec{U}_k$

$\begin{cases} n_k \\ q_k \\ \vec{U}_k \end{cases}$

### 3) Bilan de charge : équation de conservation de la charge

#### (a) Equation globale de conservation de la charge



⊗ dans S fermée :

$$\left. \begin{array}{l} \text{à } t: q(t) \\ \text{à } t+dt: q(t+dt) \end{array} \right\} \text{entre } t \text{ et } t+dt: dq = q(t+dt) - q(t)$$

⊗ pdt dt :  $\Delta q_s = i_s(t) dt = \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} dt$

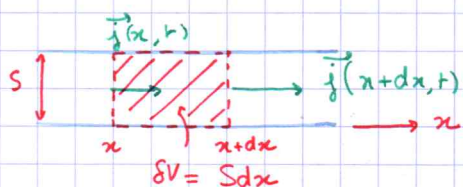
charge sortant algébrique de S

#### ⊗ Conservation de la charge

$$dq = -\Delta q_s$$

équation intégrale / globale de la conservation de la charge.

#### b) Equation locale en 1D



⊗ dans SV :  $q(t) = \rho(x,t) \times S dx$

$$q(t+dt) = \rho(x,t+dt) \times S dx$$

$$\Rightarrow dq = [\rho(x,t+dt) - \rho(x,t)] S dx$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} (x,t) S dx dt$$

⊗  $\Delta q_s$  ?

$$\Delta q_s = j(x+dx,t) S dt - j(x,t) S dt$$

$$= \frac{\partial j}{\partial x} (x,t) S dx dt$$

⊗ Cons. de q :

$$dq = -\Delta q_s$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

#### c) Equation locale à 3D

$$q(t) = \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV$$

$$q(t+dt) = \iiint_V \rho(\vec{r}, t+dt) dV$$

$$dq = \left[ \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} (\vec{r}, t) dV \right] dt$$

⊗  $\Delta q_s = i_s(t) dt = \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} dt = \iiint_V \text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) dV dt$

⊗ Cons. de la charge :

$$dq = -\Delta q_s \Leftrightarrow \iiint_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} (\vec{r}, t) + \text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) \right] dV = 0$$

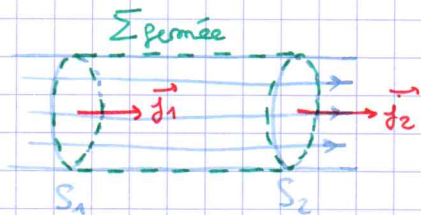
donc  $\frac{\partial \rho}{\partial t} (\vec{r}, t) + \text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$  équation locale de la conservation de la charge.

#### 4 - Cas du régime stationnaire

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

(a)  $\vec{j}(\vec{r})$  est à flux conservatif  $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 = i_{\Sigma_{\text{fermée}}}$

(b) Unicité du courant le long  $S$  d'une branche en régime stat.



$$i_1 = i_2 = i^{\text{te}} (\text{branche})$$

(c) Lois des nœuds "des électriciens"  $\sum_k i_k = 0$

## II - Conduction électrique : loi d'Ohm

### 1 - Loi d'Ohm locale - conductivité électrique

⊗ ds bcp de conducteurs : application d'un champ  $\vec{E}$  (via générateurs)

si  $\vec{E}$  ne varie pas trop vite  
et si  $\|\vec{E}\|$  pas trop grand

apparition d'un courant de densité  $\vec{j}$   
avec  $\vec{j} \propto \vec{E}$

loi LINÉAIRE

⊗ loi d'Ohm locale

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \left[ \sigma \right] = \Omega^{-1} \text{m}^{-1} = \text{S.m}^{-1}$$

conductivité électrique

loi phénoménologique  
empirique

Rem: résistivité  $\rho \hat{=} \frac{1}{\sigma}$

⊗ OG: cuivre:  $\sigma \approx 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$

### 2 - Modèle de Drude (1900) → modèle classique

(a) Hypothèses : réseau périodique cristallin d'ions fixes, baignant ds l'"gaz" d' $e^-$  libres

$e^-$  libres : sans aucune interaction avec réseau si réseau parfait  
 $e^-$  indép<sup>ts</sup> : pas d'interactions entre eux

$e^-$  subissent des collisions avec les défauts du réseau ( $\tau = \text{tps moyen séparant}$

→ juste après collision  $\langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$

2 collisions successives)

on soumet le métal à  $\vec{E}$  variant sur  $T \gg \tau$

## (b) Modèle phénoménologique

⊙ collisions modélisées par 1 force moyenne dissipative  $\vec{F} \propto \frac{1}{\tau}$

→ force de frottement fluide:  $\vec{F} = -\frac{m}{\tau} \vec{U}$

⊙ PFD à 1 e<sup>-</sup> "moyen"

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{p} \rangle = m \frac{d\vec{U}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \vec{U} - e\vec{E}$$

$$\frac{d\vec{U}}{dt} + \frac{1}{\tau} \vec{U} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

⊙ vitesse limite en RP:

$$\vec{U}_{\infty} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E} \hat{=} \mu \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = -me \vec{U}_{\infty} = \frac{ne^2 \tau}{m} \vec{E}$$

$$\text{i.e. } \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{avec } \sigma = \frac{ne^2 \tau}{m}$$

OG: Cu  $\left( \begin{array}{l} n \sim 10^{29} \text{ m}^{-3} \\ \tau \sim 10^{-14} \text{ s} \end{array} \right) \sigma = \frac{10^{29} \times (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 10^{-14}}{9 \cdot 10^{-31}} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

→ influence de T:  $T \uparrow \Rightarrow v_{th} \uparrow \Rightarrow \tau \downarrow$

bon OG

donc  $T \uparrow \Rightarrow \sigma \downarrow$ : OK avec exp

→ libre parcours moyen  $\bar{l}$ :  $\bar{l} = v_{th} \times \tau \approx 10^5 \times 10^{-14} = 1 \text{ nm} \sim \text{distance intratomique}$   
⇒ trait<sup>m</sup> moyen pas possible

## (c) Modèle collisionnel

→ soit un e<sup>-</sup> "l" ayant subi 1 collision à  $t_i$   
→ il va subir 1 nouvelle collision à  $t_{i+1}$

⊙ PFD à l'e<sup>-</sup> "l" entre  $t_i^+$  et  $t_{i+1}$

$$m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}$$

$$\underbrace{\vec{v}_e(t_{i+1})}_{\vec{U}} - \underbrace{\vec{v}_e(t_i^+)}_{\vec{0}} = -\frac{e}{m} \vec{E} \underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{\tau}$$

→ retour m  $\frac{d\vec{U}}{dt} + \frac{1}{\tau} \vec{U} = \frac{\vec{U}_{\infty}}{\tau} \Rightarrow \vec{U}(t) = \vec{U}_{\infty} (1 - e^{-t/\tau})$

$$\tau \sim 10^{-14} \text{ s}$$

## 3. Puissance volumique fournie par le champ au conducteur. Effet Joule local

(a) Puissance volumique fournie par  $\vec{E}$

⊙ Hyp: 1 seul type de porteurs libres  $\left( \begin{array}{l} q \\ m \\ \tau \end{array} \right)$

→ chaque porteur libre subit  $\vec{F}_e = q\vec{E} \Rightarrow$  il reçoit de la part de  $\vec{E}$  une puissance

$$P_L = \vec{F}_e \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

ds SV m\u00e9so SN porteurs SN = n.SV  
 \u2192 puissance re\u00e7ue par les SN porteurs.

$$\delta P_i = \sum_{\substack{\text{porteurs:} \\ \in \delta V}} q \vec{E} \cdot \vec{v}_i = q \vec{E} \cdot \underbrace{\sum \vec{v}_i}_{\substack{\text{SV} \times \langle \vec{v} \rangle \\ \text{m\u00e9so}}}$$

$$\delta P_i = nq \vec{U} \cdot \vec{E} \delta V$$

$$\Rightarrow \delta P_{em} = n_{vol} \delta V \quad \text{ou} \quad n_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

(b) Conducteur Ohmique : effet Joule local

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow n_{vol} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma} > 0$$

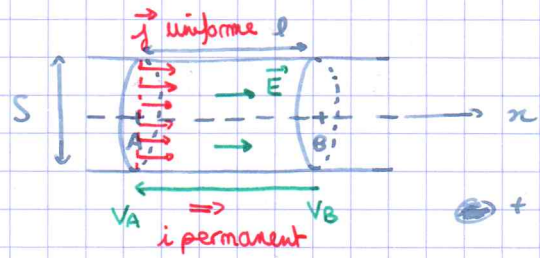
le champ  $\vec{E}$  fournit de la puissance aux charges du milieu,  
 La m\u00e9canique

transf\u00e9r\u00e9e au r\u00e9seau via collisions

\u2192 vibrations de r\u00e9seau : agitation thermique,  $T \uparrow$ , effet Joule.

### III - Loi d'Ohm int\u00e9grale : r\u00e9sistance \u00e9lectrique

1 - R\u00e9sistance \u00e9lectrique d'un conducteur ohmique cylindrique (courants uniformes axiaux)



on applique  $U_{AB}$  (i.e.  $\vec{E}$ )  $\Rightarrow$   $i$  (i.e.  $\vec{j}$ )

Qualitativement  $\|\vec{E}\| = \frac{U_{AB}}{l}$   $\vec{E}$  en  $V.m^{-1}$

+ pr\u00e9cis\u00e9ment : en \u00e9lectrostatique  $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } V(\vec{r})$   
 potentiel \u00e9lectrostatique

\u2192 ici : 1D  $\left\{ \begin{array}{l} V(x) \text{ avec } \frac{dV}{dx} < 0 \\ \vec{E} = -\frac{dV}{dx} \vec{u}_x \end{array} \right.$  " $\vec{E}$  descend les potentiels"

$$U_{AB} = V_A - V_B = \int_B^A dV = \int_B^A \frac{dV}{dx} \vec{u}_x \cdot dx \vec{u}_x = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{circulation de } \vec{E} \text{ de } A \text{ \u00e0 } B$$

Admis : RP \u00e0 1D :  $V(x) = \alpha x + \beta$  donc  $\|\vec{E}\|$  uniforme  $\|\vec{E}\| = \frac{U_{AB}}{l} = E$

Courant :  $i = \vec{j} \cdot S \vec{u}_x = jS$  or  $\vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow i = \sigma ES$

$$\Rightarrow i = \frac{\sigma S}{l} U_{AB}$$

$$\Rightarrow U_{AB} = u = \underbrace{\frac{l}{\sigma S}}_R i \quad R = \frac{l}{\sigma S}$$

ADG:

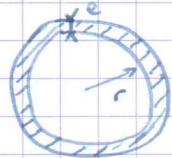
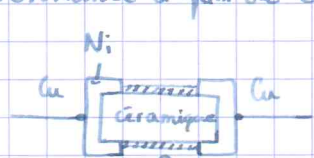
→ câble de cuivre (TP)

$$l = 1 \text{ m}$$

$$\phi = 2 \text{ mm}$$

$$R = \frac{l}{\sigma \pi \frac{\phi^2}{4}} = \frac{1}{6 \cdot 10^7 \times 3 \times 10^{-6}} \# \frac{1}{200} = 5 \text{ m}\Omega$$

→ résistance à film de carbone



$$R = \frac{l}{\sigma_c 2\pi r e}$$

$$\sigma_c = \frac{1}{\rho_c}$$

et  $\rho_c = 3,5 \cdot 10^{-5} \Omega \text{ m}$

$$\Rightarrow l e = \frac{l \rho_c}{2\pi R r} = \frac{10^{-2} \cdot 3,5 \cdot 10^{-5}}{2 \times 3 \times 10^3 \cdot 2 \times 10^{-3}} \# 30 \text{ nm}$$

## 2. Puissance dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique

$$P_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma}$$

$$\Rightarrow P_{\text{elec}} = \iiint_{\text{conducteur}} P_{\text{vol}} \delta V = \iiint_{\text{cond}} \frac{j^2}{\sigma} \delta V = \frac{j^2}{\sigma} \frac{V}{S \cdot l} = \frac{S l}{\sigma} \times \frac{j^2}{S^2} = \left( \frac{l}{\sigma S} \right) j^2$$

## ⊕ Puissance dissipée par effet Joule

$\lambda^e$  ppc au cond. en RP, à  $T = \text{cste}$

$$0 = dU = \delta W^{\text{ext}} + \delta Q^{\text{ext}} = P_{\text{elec}} dt + \int_{\text{th}}^{\text{ext}} dt \Rightarrow \int_{\text{th}}^{\text{ext}} = -P_{\text{elec}} = -R i^2 < 0$$

dégagement de chaleur : effet Joule