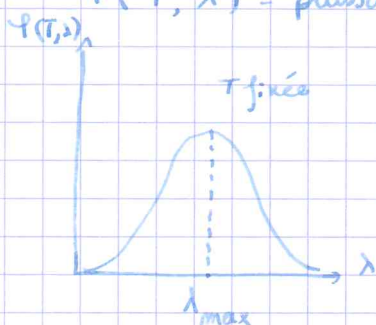
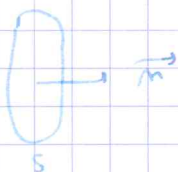


I - Transferts thermiques - [Diffusion / conduction] thermique

1 - les 3 modes de transferts thermiques

(a) Convection: transport [d'énergie / de chaleur] dû au mov^t du milie support

(b) Diffusion: transport de chaleur dans 1 milieu FIXE

(c) Rayonnement: transport d'énergie par voie électromagnétique
→ 1 corps des temp. T rayonne 1 onde ém. et donc de l'énergie $\varphi(T, \lambda)$ = puissance émise / unité de surface / unité de long. d'onde: loi de Planckloi de Wien: $\lambda_{\max} \cdot T = \text{cte} = 3000 \mu\text{m} \cdot \text{K}$ loi de Stephan: $P_{\text{ray}} = \sigma T^4 \times S \leftarrow \text{surf. du corps}$ $\sigma \approx 5.7 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ ☉ OG: Soleil, $T_s \approx 5800 \text{ K}$ à 6000 K ☉ Corps à $T_{\text{amb}} \approx 300 \text{ K}$ $\Rightarrow \lambda_{\max} = 10 \mu\text{m} \rightarrow \text{IR}$
 $\Rightarrow \lambda_{\max} = 500 \text{ nm} : \text{visible}$ 2 - Flux thermique et vecteur densité de courant $\vec{j}_q(\vec{r}, t)$ (a) Flux thermique algébrique à travers 1 surface orientée.
Débit d'énergie.

pdt dt: $\delta Q = \vec{j}_q^{\text{th}} \cdot \vec{n} dt$

flux en $\text{J} \cdot \text{s}^{-1} = \text{W}$ d'algébrique: $\Phi > 0$ si transf. th effective selon $\vec{n}$.

(b) Vecteur densité de courant thermique

Déf: $\Phi_{\text{th}} = \iint_S \vec{j}_q \cdot d\vec{S}$
 $\uparrow$
 $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$

3 - Hypothèse de l'équation thermo locale

→ Soit 1 corps macro hors éq, de température inhomogène et variable ds le temps
↳ temps de retour à l'éq τ_{eq} → on le découpe en petits vol méso: tps de mise à l'éq. $\tau_{\text{eq}}^{\text{méso}}$

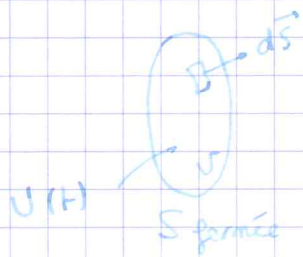


Si $T_{\text{ext}} \gg T_{\text{eq}}^{\text{mésor}}$: à chaque instant, on est à l'éq à l'échelle mésor $\rightarrow$ on peut définir $T(\vec{r}, t)$
 éq local $\rightarrow$ mais $T(\vec{r}, t)$ n'est uniforme à l'échelle macro $\rightarrow$ pas éq globale

Hyp Eq locale: $T(\vec{r}, t)$ définie et $T_{\text{ext}} \gg T_{\text{eq}}^{\text{mésor}}$

4) Bilan d'énergie

(a) Bilan global avec terme source



① à t: $U(t)$
 à t+dt: $U(t+dt)$ } $dU = U(t+dt) - U(t)$

② 1^{re} ppe: $dU = \underbrace{\delta Q_{\text{ech}}}_{\delta Q_{\text{ech}} + \delta Q_{\text{prod}}} + \underbrace{\delta W_{\text{ext}}}_{0 + \delta W_{\text{prod}}}$ $dU = \delta Q_{\text{ech}} + \begin{cases} \delta W_{\text{prod}} \\ \delta Q_{\text{prod}} \end{cases}$

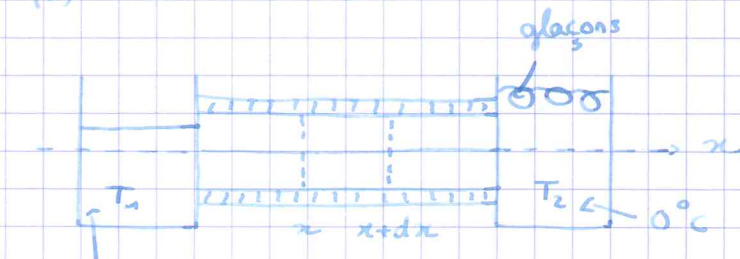
$\rightarrow \delta Q_{\text{ech}} = - \oint \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} \frac{dt}{dt}$ $\rightarrow \delta W_{\text{prod}} = \iiint_V P_{\text{vol}} \delta V \times dt$

$\rightarrow \delta Q_{\text{prod}} = \iiint_V P_{\text{vol}}^H \delta V dt$

où $P_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma} = \sigma E^2$

et $P_{\text{vol}}^H = - \frac{1}{V} \Delta_r H^0 \times \frac{dS}{dt}$

(b) Bilan local à 1D



Hyp $T(x, t)$ $\frac{\partial T}{\partial x} < 0$

$\vec{j}_Q(x, t) = j_Q(x, t) \vec{u}_x$

eau bouillante (100°C)

① Bilan de U sur $[x, x+dx]$: $U(t) = u_{\text{vol}}(x, t) \times S dx$

$U(t+dt) = u_{\text{vol}}(x, t+dt) \times S dx$

$\Rightarrow dU = \frac{\partial u_{\text{vol}}}{\partial t}(x, t) \times S dx dt$ or $du_{\text{vol}} = c_{\text{vol}} dT = \mu c dT$

$\Rightarrow dU = \mu c \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) \times S dx dt$

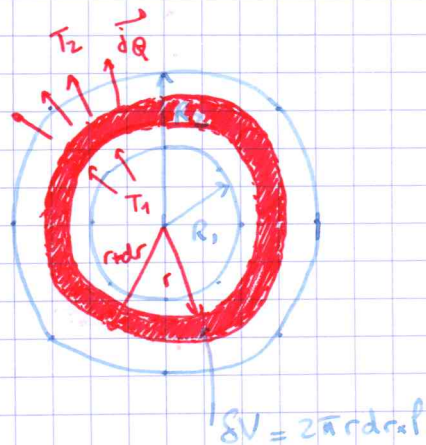
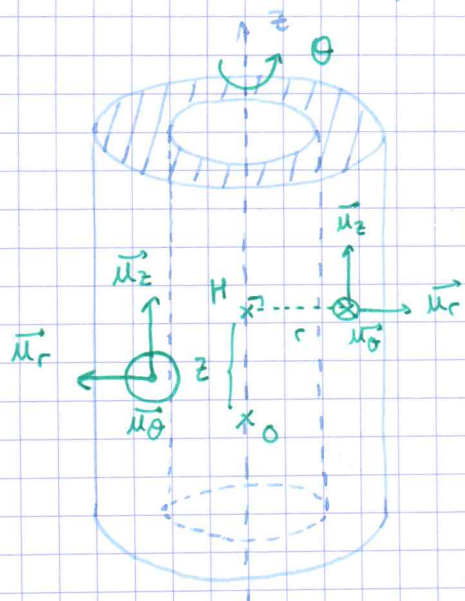
② $\delta Q_{\text{ech}} = j_Q(x, t) S dt - j_Q(x+dx, t) S dt = - \frac{\partial j_Q(x, t)}{\partial x} S dx dt$

③ $\delta W_{\text{prod}} = \delta Q_{\text{prod}} = 0$

$\Rightarrow dU = \delta Q_{\text{ech}} \quad \mu c \frac{\partial T}{\partial t} S dx dt = - \frac{\partial j_Q}{\partial x} S dx dt$

$\Rightarrow \mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_Q}{\partial x} = 0$ 1^{re} ppe local

(c) Bilan local en g $\ddot{o}$ cylindriques



hypo: $T(r, \theta, x, t)$

$$\vec{j}_Q(r, \theta, z, t) = j_Q(r, t) \vec{u}_r$$

Q: bilan local d'énergie?

⊗ Bilan d'énergie:

$$\begin{cases} U(t) = u_{\text{vol}}(r, t) \times 2\pi r dr l \\ U(t+dt) = u_{\text{vol}}(r, t+dt) \times 2\pi r dr l \end{cases}$$

$$dU = \frac{\partial u_{\text{vol}}}{\partial t}(r, t) \times 2\pi r dr l dt$$

$$dU = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(r, t) \times 2\pi r dr l dt$$

$$\otimes \delta Q_{\text{ech}} = \left[\iint_{\text{cyl } r} \vec{j}_Q(r, t) \cdot d\vec{S} - \iint_{\text{cyl } r+dr} \vec{j}_Q(r+dr, t) \cdot d\vec{S} \right] \times dt$$

$$\iint_{\text{cyl } r} j_Q(r, t) dS = j_Q(r, t) \times 2\pi r l$$

$$\Rightarrow \delta Q_{\text{ech}} = j_Q(r, t) \times 2\pi r l dt - j_Q(r+dr, t) \times 2\pi (r+dr) l dt$$

$$\delta Q_{\text{ech}} = -2\pi l dt \times dr \times \frac{\partial}{\partial r}(r j_Q)$$

$$\otimes \delta W_{\text{prod}} = \delta Q_{\text{prod}} = 0$$

$$\otimes \text{1}^{\text{er}} \text{ ppe: } dU = \delta Q_s \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r j_Q) = 0$$

NB: si terme source $P_{\text{vol}}(r, t)$:

$$\delta W_{\text{prod}} = P_{\text{vol}}(r, t) \times \delta V = P_{\text{vol}}(r, t) \times 2\pi r dr l dt$$

$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r j_Q) = P_{\text{vol}}$$

(d) Eq. locale de cons. de l'énergie 3D

$$\textcircled{1} U(t) = \iiint_V u_{\text{vol}}(\vec{r}, t) \delta V \quad U(t+dt) = \iiint_V u_{\text{vol}}(\vec{r}, t+dt) \delta V$$

$$\Rightarrow dU = \iiint_V \frac{\partial u_{\text{vol}}}{\partial t}(\vec{r}, t) \delta V dt$$

$$\textcircled{2} \delta Q_{\text{ech}} = - \oint \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}^{\text{ext}} dt = - \iiint_V \text{div} \vec{j}_Q(\vec{r}, t) \delta V dt$$

$$\textcircled{3} \left\{ \begin{array}{l} \delta W_{\text{prod}} \\ \text{ou} \\ \delta Q_{\text{prod}} \end{array} \right\} = \iiint_V p_{\text{vol}}(\vec{r}, t) \delta V dt$$

$$\textcircled{4} 1^{\text{e}} \text{ ppc : } dU = \delta Q_{\text{ech}} + \left\{ \begin{array}{l} \delta W_{\text{prod}} \\ \text{ou} \\ \delta Q_{\text{prod}} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \iiint_V \left[\frac{\partial u_{\text{vol}}}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_Q - p_{\text{vol}} \right] \delta V = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_{\text{vol}}}{\partial t}(\vec{r}, t) + \text{div} \vec{j}_Q(\vec{r}, t) = p_{\text{vol}}(\vec{r}, t)$$

$$\text{ou : } \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(\vec{r}, t) + \text{div} \vec{j}_Q(\vec{r}, t) = p_{\text{vol}}(\vec{r}, t)$$

II - Loi de transport phénoménologique : la loi de Fourier

1 - Loi de Fourier - Conductivité thermique

→ "moteur" de la diffusion th. : inhomogénéité de T i.e. $\vec{\text{grad}} T \neq \vec{0}$

Q : lien entre $\vec{j}_Q$ et $\vec{\text{grad}} T$

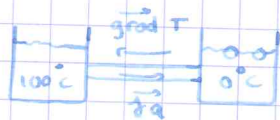
$$\textcircled{1} \text{ loi de Fourier : } \vec{j}_Q(\vec{r}, t) = -\lambda \vec{\text{grad}} T(\vec{r}, t)$$

→ $\vec{\text{grad}} T$ modéré

→ T ne varie pas trop vite dans le temps

$W.m^{-2}$

! $\lambda > 0$ conductivité thermique $W.m^{-1}.K^{-1}$



$$\vec{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x$$

< 0

$\vec{j}_Q$ dirigé des zones les + chaudes vers les + froides

2 - Ordre de grandeur

solides $\textcircled{1}$ Métaux : Cu $\lambda \sim 400 W.m^{-1}.K^{-1}$
Acier $\lambda \sim 15$

$\textcircled{2}$ Non métaux :

Verre	1
Béton	0,9
Bois	0,2

liquides eau : $\lambda \sim 0,6$

gaz air : 0,02 : très bon isolant

" $\vec{j}_Q$ descend les températures au m^{ême} titre que $\vec{E}$ descend les potentiels "

III - Equation de la diffusion thermique ou equation de la "chaleur"

1. Equation de la chaleur (ss terme source)

(a) 1D, cartésiennes

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial j_Q}{\partial x}(x, t) = 0$$

$$\text{et } \vec{j}_Q = j_Q(x, t) \vec{u}_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \vec{u}_x$$

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$D_{th} = \frac{\lambda}{\mu c} \quad \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

(b) Géométrie cylindrique

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial r}(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_Q(r, t)) = 0$$

$$\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\text{grad}} T \quad \rightarrow \quad j_Q(r, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\frac{\lambda}{\mu c}}_{D_{th}} \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial T}{\partial r})}_{\Delta T \text{ en cyl.}}$$

(c) Cas général 3D:

$$\left. \begin{aligned} \mu c \frac{\partial T}{\partial t}(\vec{r}, t) + \text{div } \vec{j}_Q(\vec{r}, t) &= 0 \\ \vec{j}_Q(\vec{r}, t) &= -\lambda \vec{\text{grad}} T(\vec{r}, t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \Delta T$$

$$\text{où } \Delta T \hat{=} \text{div}(\vec{\text{grad}} T)$$

$$= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

2. Avec terme source

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t}(\vec{r}, t) + \text{div } \vec{j}_Q(\vec{r}, t) = P_{\text{vol}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \Delta T + \frac{P_{\text{vol}}}{\mu c}$$
$$\vec{j}_Q(\vec{r}, t) = -\lambda \vec{\text{grad}} T(\vec{r}, t)$$

$$\text{où } P_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma} \quad \text{ou} \quad P_{\text{vol}} = -\frac{1}{V} \Delta r h^\circ \frac{dS}{dt}$$

IV - Propriétés de l'équation de la chaleur - Conditions aux limites

1 - Rappel des propriétés :

- linéarité $\rightarrow$ th. superp. + analyse de Fourier
- irréversibilité (ordre 1 par rap. à t)
- 1 C.I. à $t=0$ + 2 C.L. (ordre 2/espace) pr 1 pb à 1 seule var. d'espace

• Tps de diffusion $\tau_{diff} \approx \frac{L^2}{D_{th}}$ ex: meilleur en Bois ? ou acier ?

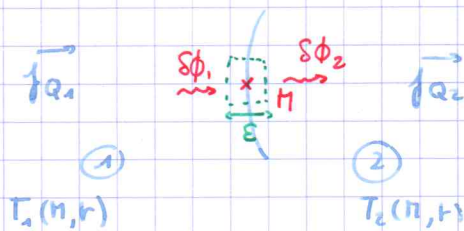
$$D_{th}^{acier} = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$D_{th}^{bois} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\tau_{diff}^{bois}}{\tau_{diff}^{acier}} = 50.$$

2 - Continuité du flux thermique

pas d'accu. d'énergie de vol $\left| \begin{array}{l} \delta V \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0 \end{array} \right.$

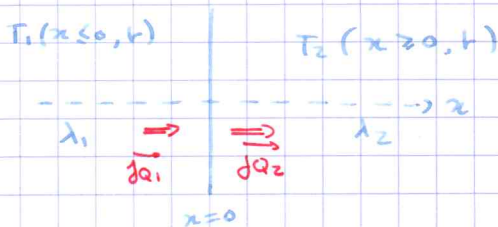


$$\Rightarrow \delta \Phi_1 = \delta \Phi_2 \text{ qd } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\vec{q}_1(\vec{n}, t) \cdot \vec{n} dS = \vec{q}_2(\vec{n}, t) \cdot \vec{n} dS$$

Conclusion: La compo normale $\vec{q}_n$ est continue à l'interface -

$\rightarrow$ ex: 1D, interface entre 2 solides



$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(0, t) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(0, t) \quad \forall t \quad \underline{\text{C.L.}}$$

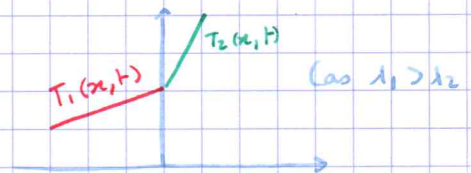
3 - Contact thermique parfait entre 2 solides

hypo: pas du tout de fluide entre les deux solides
 $\rightarrow$ continuité de la T°

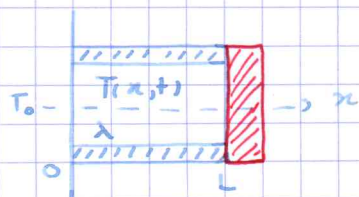
$$\Rightarrow \text{2 C.L.: } \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(0, t) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(0, t)$$

$$\text{et } T_1(0, t) = T_2(0, t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \Delta T + \frac{P_{vol}}{\rho c}$$



4- Paroi calorifugée



$$\frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \forall t$$

5- Interface solide / fluide : transfert conducto-convectif

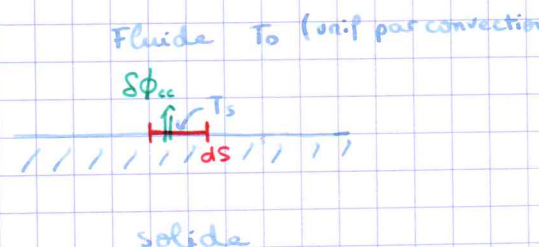
(a) Loi empirique de Newton

coefficient de transfert conducto-convectif

$$\delta \Phi_{\text{ice}} = h_{\text{cc}} (T_s - T_0) dS$$

$$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$$

$$(\delta Q_{\text{ice}} = \delta \Phi_{\text{ice}} dt)$$



OG:

h_{cc}	sol / air	sol / eau
CV naturelle	5 → 30	600 → 1000
CV forcée	10 → 300	300 → 12 000

$$\begin{aligned} h_{\text{cc}}^{\text{liq}} &> h_{\text{cc}}^{\text{gaz}} \\ h_{\text{cc}}^{\text{forcée}} &> h_{\text{cc}}^{\text{naturelle}} \end{aligned}$$

(b) Interprétation physique

$$\begin{aligned} \delta \Phi_H &= \vec{j}_Q(0^+, t) dS \vec{u}_x \\ &= -\lambda_f \left(\frac{\partial T_f}{\partial x} \right)_{0^+, t} dS \end{aligned}$$

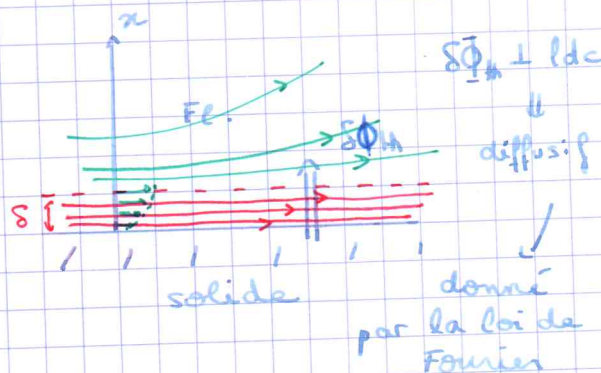
$$\left(\frac{\partial T_f}{\partial x} \right)_{0^+, t} \approx \frac{T_0 - T_s}{\delta}$$

$$\Rightarrow \delta \Phi_H = \frac{\lambda_f}{\delta} (T_s - T_0) dS$$

$$h_{\text{cc}} = \frac{\lambda_f}{\delta}$$

$$h_{\text{cc}} \propto \lambda_f \Rightarrow h_{\text{cc}}^{\text{liq}} > h_{\text{cc}}^{\text{gaz}}$$

$$h_{\text{cc}} \propto \frac{1}{\delta} \text{ or } \delta \propto \frac{1}{\sqrt{Re}} \Rightarrow h_{\text{cc}}^{\text{forcée}} > h_{\text{cc}}^{\text{naturelle}}$$



Conduction: λ_f ; $\perp$ aux $\times$ ldc

convection: épaisseur CL; δ + ou - gde s conv. + ou - for

V - Notion de résistance thermique

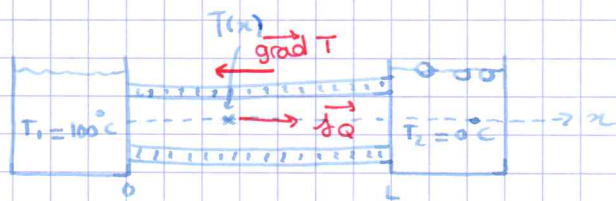
1. Résistance thermique 1D en RP

RP: $T(x)$

$$\vec{j}_Q = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{j}_Q = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{j}_Q \text{ uniforme} \\ \frac{dT}{dx} \text{ uniforme} \end{cases}$$



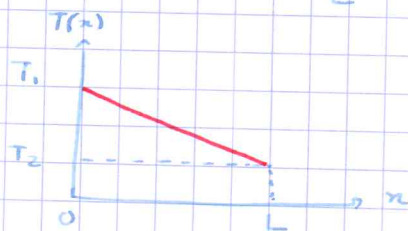
(a) Profil de température $T(x)$

$$0 = \frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \Delta T = D_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T(x) = Ax + B$$

$$\underline{CL}: x=0 \quad T(0) = T_1 = B$$

$$x=L \quad T(L) = T_2 = AL + T_1 \Rightarrow A = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$



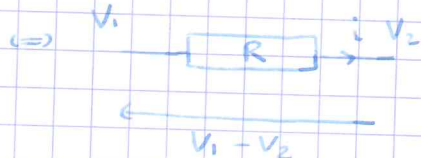
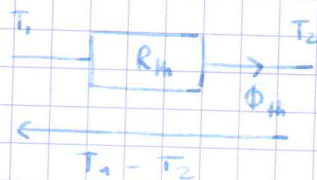
(b) Résistance thermique : lien entre Φ_H et $T_1 - T_2$?

$$\Phi_H = \vec{j}_Q \cdot S \vec{u}_x = -\lambda \frac{dT}{dx} \cdot S = \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2)$$

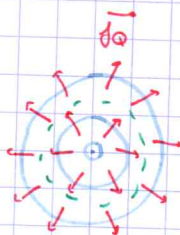
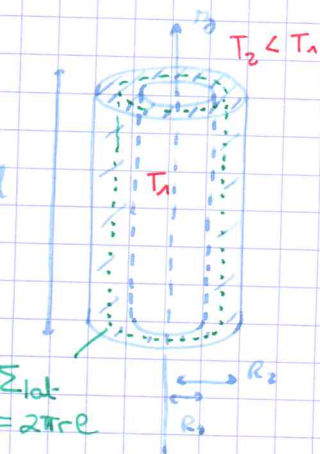
$\Phi_H \propto T_1 - T_2$: LINÉARITÉ

$$\text{donc } T_1 - T_2 = R_{th} \Phi_H \Rightarrow R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$

(c) Analogie avec l'électricité



2. Résistance thermique en géométrie cylindrique



Hypos

• RP

• $l \gg R_1, R_2$

• $T(r)$

Q: résis. th de l'isolant ?

$$\vec{j}_Q = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r$$

$$\Phi(r) = \Phi(r+dr) = \Phi \text{ car } \vec{j}_Q(r) \text{ est à flux conservatif (div } \vec{j}_Q = 0)$$

$$\Phi(r) = \iint_S \vec{j}_Q(r) \cdot \delta \Sigma \vec{u}_r = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 2\pi r l = \Phi$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dr} = - \frac{\Phi}{2\pi\lambda l r}$$

$$\Rightarrow T(r) = - \frac{\Phi}{2\pi\lambda l} \ln r + A$$

$$\text{C.L.: } r = R_1 : T(R_1) = T_1 = A - \frac{\Phi}{2\pi\lambda l} \ln R_1$$

$$\Rightarrow A = T_1 + \frac{\Phi}{2\pi\lambda l} \ln R_1$$

$$\Rightarrow T(r) = T_1 + \frac{\Phi}{\lambda \cdot 2\pi l} \ln \left(\frac{R_1}{r} \right)$$

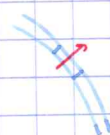
$$r = R_2 : T_2 = T_1 + \frac{\Phi}{\lambda 2\pi l} \ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right) \Rightarrow R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi l} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

⊗ isolant mince:

$$e \hat{=} R_2 - R_1 \ll R_1 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_1 + e}{R_1} = 1 + \frac{e}{R_1} \ll 1$$

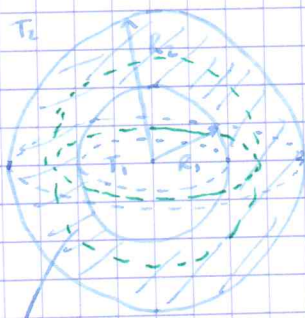
$$\Rightarrow R_{th} = \frac{1}{\lambda 2\pi l} \ln \left(1 + \frac{e}{R_1} \right)$$

$$\approx \frac{1}{\lambda 2\pi l} \frac{e}{R_1} = \frac{e}{\lambda \Sigma_{tot}}$$



Cas 1D

Exo: Cas géométrie sphérique



$$\left\{ R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right. \text{ (résultat)}$$

$$\text{div } \vec{j}_q = 0 \Rightarrow \Phi = \text{cste}$$

$$\Phi(r) = \Phi = \iint_{\Sigma} \vec{j}_q(r) \cdot d\Sigma \vec{u}_r$$

$$\vec{j}_q = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r$$

$$\Phi = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dr} = - \frac{\Phi}{\lambda \times 4\pi r^2} \Rightarrow T(r) = \frac{\Phi}{4\pi\lambda r} + A$$

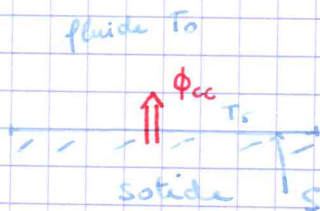
$$\text{C.L.: } r = R_1 : T(R_1) = A + \frac{\Phi}{4\pi\lambda R_1} = T_1 \Rightarrow A = T_1 - \frac{\Phi}{4\pi\lambda R_1}$$

$$T(r) = \frac{\Phi}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right) + T_1$$

$$T(R_2) = T_2 = \frac{\Phi}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + T_1$$

$$\Rightarrow R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

3 - Résistance thermique conducto-convective



$$\Phi_{cc} = h_{cc}(T_s - T_0) \times S = \Phi_{cc} \propto T_s - T_0$$

$$\text{donc } T_s - T_0 = R_{cc} \Phi_{cc}$$

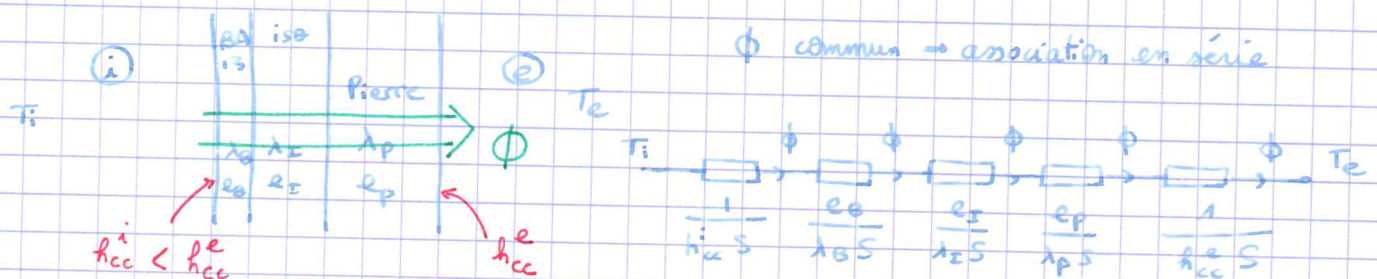
$$\text{soit } R_{cc} = \frac{1}{h_{cc} S}$$

4 - Association de résistances thermiques

(a) en série : $\neq$ couches traversées par le m^{ême} flux Φ soumises globalement à $T_i - T_e$

$$T_i - T_e = R_{th}^{eq} \Phi \quad \text{avec } R_{th}^{eq} = \sum_k R_{th,k}$$

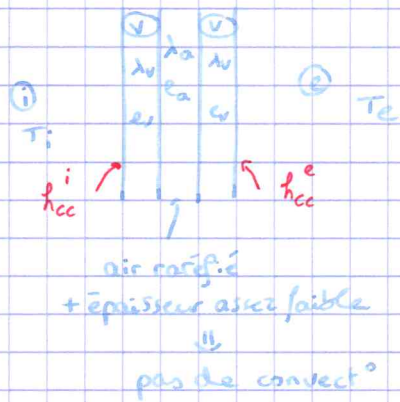
ex 1: Mur



$$R_{th}^{ext} = \frac{1}{S} \left[\frac{1}{h_{cc}^i} + \frac{e_B}{\lambda_B} + \frac{e_I}{\lambda_I} + \frac{e_P}{\lambda_P} + \frac{1}{h_{cc}^e} \right] \approx \frac{e_I}{\lambda_I S}$$

terme dominant (isolant)

ex. 2: Double vitrage



$$\frac{2e_v}{\lambda_v S} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$$

$$\frac{e_a}{\lambda_a S} = 0,8 \text{ K.W}^{-1}$$

$$\frac{1}{R_{cc}^i S} = 0,1$$

$$\frac{1}{R_{cc}^e S} \approx 3 \cdot 10^{-2}$$

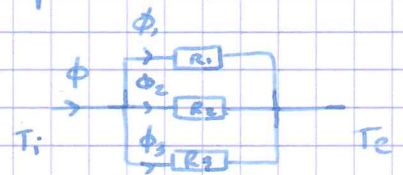
$$R_{th}^{eq} = \frac{eA}{\lambda S}$$

b) En parallèle : la même diff de température est appliquée aux bornes des n conducteurs thermiques parcourus par les flux partiels ϕ_k

$$\Phi = \sum_k \phi_k = \sum_k \frac{T_i - T_e}{R_k}$$

$$\Phi = \frac{T_i - T_e}{R_{th}^{eq}} \Rightarrow R_{th}^{eq} = \frac{T_i - T_e}{\Phi} = \frac{1}{\sum_k \frac{1}{R_k}}$$

$$\frac{1}{R_{th}^{eq}} = \sum_k \frac{1}{R_k}$$



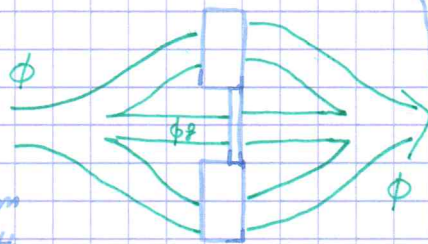
ex: mur percé d'une fenêtre

mur: $\lambda_m = 0,9 \text{ W/m/K}$

$e_m = 30 \text{ cm}$

$S_m = 10 \text{ m}^2$

$$\frac{1}{R_{th}^{eq}} = \frac{\lambda_m S_m}{e_m} + \frac{\lambda_g S_g}{e_g}$$



$\lambda_g = 1 \text{ W/m/K}$

$e_g = 4 \text{ mm}$

$S_g = 1 \text{ m}^2$

$$R_{th}^{eq} \approx R_{th}^f \approx \frac{e_g}{\lambda_g S_g} \ll R_{th}^m$$

$$\frac{R_{th}^{eq}}{R_{th}^m} = \frac{1}{8} \Rightarrow \text{pertes } \times 8$$

S - ARQS thermique

(a) Simulation numérique 1D



But: visualiser $T(x, t;)$

$$\text{Pde: } \frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T(x, t) \rightarrow T_{n,m}$$

$$x_n = n \Delta x$$

$$t_m = m \Delta t$$

$$\text{avec } \Delta t \approx \frac{\Delta x^2}{D}$$

• échelon de T° en $x=0$ pr $t > 0$

→ pr $t_i \gg \tau_{diff} = \frac{L^2}{D_{th}}$, $T(x, t_i) \rightarrow$ profil affine indép de t
 ⇒ rég. stationnaire

→ pr $t_i \lesssim \tau_{diff}$: régime transitoire

• Modif de la CL en $x=0$, à partir du RP

$T(0, t)$ passe de 10°C à 4°C ± vite, pendant tps courts d'env Δt_{env}

→ pr $\Delta t_{\text{évo}} \lesssim \tau_{\text{diff}}$: rég transitoire instationnaire → pas de RP
 évo rapide sauf pour $t_i \gg \tau_{\text{diff}}$

→ pr $\Delta t_{\text{évo}} \gg \tau_{\text{diff}}$: profils $T(x, t)$ sont tous affines → RQS
 évo lente et $t_i \gg \Delta t_{\text{évo}}$

(b) Définition de l'ARQS thermique

Def: ds ARQS, à chaque instant, les lois du RP sont vraies
 (loi des nœuds, résist th., profils affines)

$$\text{ARQS} \Leftrightarrow \Delta t_{\text{évo}} \gg \tau_{\text{diff}} \quad \text{i.e.} \quad \Delta t_{\text{évo}} \gg \frac{L^2}{D_{th}} \quad \text{ou} \quad L \ll \sqrt{D_{th} \Delta t_{\text{évo}}}$$

Ex: mur de béton $D_{th}^b = 3,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

$e = 7 \text{ cm} \rightarrow \tau_{\text{diff}} \approx 4 \text{ h}$: ARQS ou sans doute

$e = 30 \text{ cm} \rightarrow \tau_{\text{diff}} \approx 3 \text{ j}$: ARQS douteuse

6. Evolution de la température d'une habitation - Circuit RC équivalent dans l'ARQS

Hyp: ARQS C.I.: $T_i(0) = T_e$ et on met le chauffage à $t = 0$.

Maison: C = capacité thermique globale ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$)

R = résist. th. globale produisant l'ens. des pertes th. avec l'ext.

P_0 = puissance th. fournie par l'installation de chauffage (W)

T_e : temp. ext (cte); $T_i(t)$: temp. int (évo assez lente pr ARQS)

1^{re} ppe à la maison et à son contenu (chauffage central en dehors)

$$\frac{dU}{C \cdot dT_i} = \delta Q^{\text{ext}} + 0 = P_0 dt - \Phi dt \quad \Leftrightarrow \quad C \cdot \frac{dT_i}{dt} + \frac{1}{R} (T_i(t) - T_e) = P_0$$

donc $\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\tau} \theta(t) = \frac{P_0}{C}$ $\hat{= \theta(t)}$

$$\tau = R_{th} C_{th} = \frac{J}{K} \rightarrow \frac{J}{W} = s$$

$\downarrow$
K/W

Résolution:

$$\theta(t) = A e^{-t/\tau} + R P_0$$

C.I.: $\theta(0) = 0 = A + R P_0$

$$\Rightarrow \theta(t) = R P_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

$T_i(t)$

Circuit équivalent: $C \frac{dT_i}{dt} + \frac{1}{R} (T_i - T_e) = P_0$

