PSI*

Bilans macroscopiques

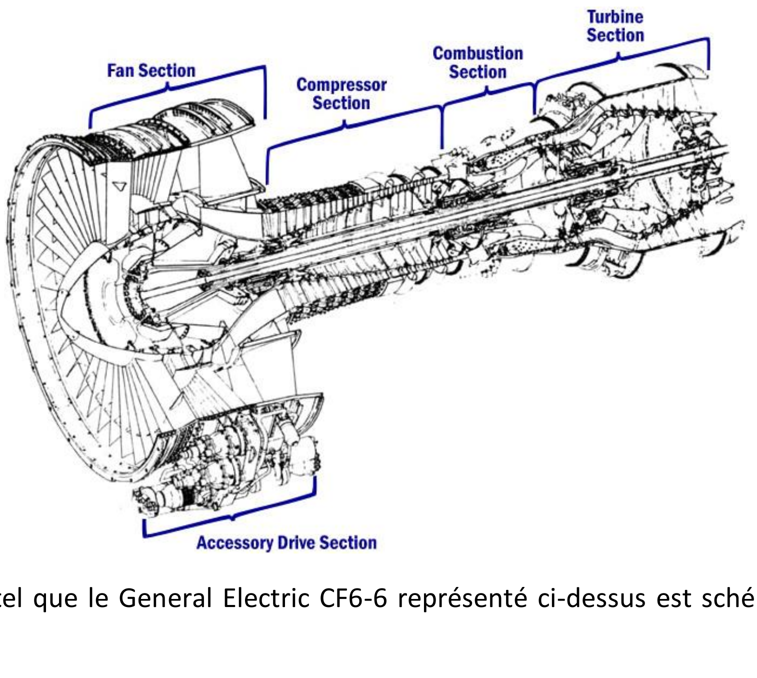
1. Bilans thermodynamiques

Exercice 1 : Elévation de la température d'une rivière à proximité d'une centrale nucléaire

Une centrale nucléaire délivre une puissance moyenne $\mathcal{P}$ de 1 GW. Son rendement thermodynamique s'écrit $\eta = x\eta_{rev}$, où η_{rev} est le rendement thermodynamique pour un cycle réversible et $x = 0{,}6$. Lors d'un cycle, de l'eau circule entre le cœur de la centrale dont la température vaut $T_1 = 700$ K et une rivière dont le débit de volume vaut $D = 400$ m^3 ×s^{-1} et la température d'entrée $T_2 = 290$ K. La température de sortie de la rivière est $T_2 + \Delta T_2$. On cherche à calculer numériquement ΔT_2 lorsque la centrale fonctionne en régime stationnaire. On suppose $\Delta T_2 \ll T_2$, ce qui permet de considérer que la rivière est une source froide de température T_2 pour la machine thermique.

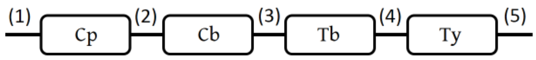
1. Retrouver l'expression deη_{rev} en fonction de T_1 et T_2.
2. En déduire l'expression de l'énergie Q_2 fournie sous forme de chaleur par la machine à la rivière pendant la durée Δt d'un cycle, en fonction de $\mathcal{P}$, Δt , x, T_1 et T_2.
3. Déterminer ΔT_2 . On donne la capacité thermique massique de l'eau $c_P = 4{,}18$ kJ.K^{-1}.kg^{-1}.
4. Il arrive qu'en été on doive diminuer la puissance fournie par une centrale. Expliquer pourquoi.

Exercice 2 : Turboréacteur



Un turboréacteur tel que le General Electric CF6-6 représenté ci-dessus est schématisé de la façon suivante :

- L'air est comprimé dans un compresseur calorifugé (Cp) où il évolue de l'état (1) à l'état (2) ;
- Il traverse ensuite la chambre de combustion (Cb) où il subit un échauffement isobare de l'état (2) à l'état (3) ;
- Puis, il se détend dans une turbine calorifugée (Tb) où il évolue de l'état (3) à l'état (4) ;
- Enfin, l'air traverse une tuyère (Ty), conduite de section variable, où il subit une accélération importante ; il y évolue de l'état (4) à l'état (5).



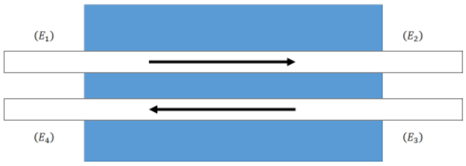
Etat	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
P (bar)	1,0	1,0	5,0	2,5	1,0
T (K)	288	$T_2 = ?$	1123	955	735

Les données concernant les différents états dont résumées dans le tableau ci-dessus. Le turboréacteur fonctionne en régime stationnaire. On suppose l'énergie cinétique négligeable partout sauf dans l'état (5) à la sortie de la tuyère (Ty), où la vitesse de l'air est notée c_5. La capacité thermique massique de l'air à pression constante vaut : $c_P = 1{,}0\ \mathrm{kJ.kg^{-1}.K^{-1}}$.

1) Compte tenu du rôle imparti à la tuyère (Ty), quelle hypothèse vous semble-t-il raisonnable de faire quant à son fonctionnement ?
   En déduire la vitesse de l'air c_5 à la sortie de la tuyère (Ty). La calculer numériquement. Commenter.
2) Calculer les travaux massiques w_i^{Cp} et w_i^{Tb} échangés par l'air avec le compresseur (Cp) et la turbine (Tb) en fonction des températures T_1, T_2, T_3 et T_4.
   Sachant que le travail récupéré dans la turbine sert intégralement et exclusivement à entraîner le compresseur, calculer numériquement T_2.
3) Déterminer et calculer numériquement le transfert thermique massique q_e^{Cb} reçu par l'air dans la chambre de combustion.
4) Justifier la définition du rendement adoptée : $r = \frac{c_5^2}{2q_e^{Cb}}$. Le calculer numériquement.

Exercice 3 : Echangeur thermique

On considère l'échangeur thermique (ET) représenté ci-dessous. Il est constitué de deux circulations parallèles d'air en contact thermique l'une avec l'autre : dans l'une, l'air évolue de l'état (E_1) à l'état (E_2) et dans l'autre, l'air évolue de l'état (E_3) à l'état (E_4). Ces états sont caractérisés par la même pression $P = 1{,}0$ bar et des températures respectives T_1, T_2, T_3 et T_4 avec $T_3 \neq T_1$.

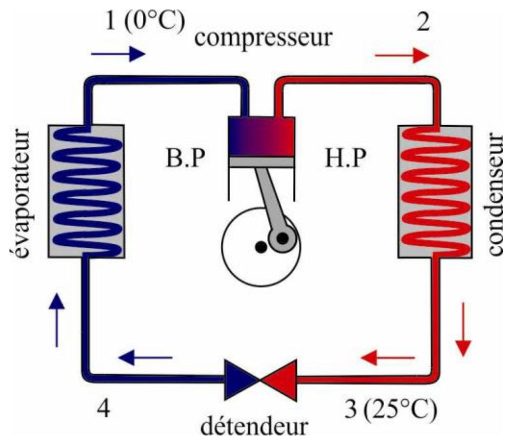


L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\ \mathrm{g.mol^{-1}}$ et de coefficient $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = 1{,}40$. On donne l'expression de l'entropie massique d'un gaz parfait en fonction de sa température et de sa pression : $s(T,P) = \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)} \ln \frac{T}{T_{ref}} - \frac{R}{M} \ln \frac{P}{P_{ref}}$ où (P_{ref}, T_{ref}) désigne un état de référence arbitraire.

L'échangeur thermique constitue un système ouvert $(\mathcal{S})$ à deux entrées et deux sorties que l'on peut considérer comme l'association de deux systèmes ouverts $(\mathcal{S}_{1,2})$ et $(\mathcal{S}_{3,4})$ comportant chacun une entrée et une sortie, en contact thermique l'un avec l'autre ; l'installation fonctionne en régime stationnaire avec un débit massique identique dans les deux circulations. On néglige les variations d'énergie mécanique. On suppose que l'échangeur thermique est **globalement** parfaitement calorifugé et que son fonctionnement est réversible.

1) Trouver deux relations liant les températures T_1, T_2, T_3 et T_4.
2) En supposant les températures d'entrée T_1 et T_3 connues, déterminer les températures de sortie T_2 et T_4. Commenter.
3) Dans un échangeur thermique réel, on a $T_1 = 350\ \mathrm{K}$, $T_2 = 290\ \mathrm{K}$, $T_3 = 280\ \mathrm{K}$ et $T_4 = 340\ \mathrm{K}$. Calculer l'entropie crée lors du transfert d'une masse m = 1,0 kg et commenter.
4) En réalité l'échangeur thermique n'est pas parfaitement calorifugé, de telle sorte qu'il cède de l'énergie par transfert thermique à l'atmosphère, considérée comme un thermostat dont la température est $T_0 = 293\ \mathrm{K}$. On a alors $T_1 = 350\ \mathrm{K}$, $T_2 = 290\ \mathrm{K}$, $T_3 = 280\ \mathrm{K}$ et $T_4 = 340\ \mathrm{K}$.
   a) Calculer le transfert thermique Q algébriquement reçu par l'échangeur thermique et commenter.
   b) Calculer l'entropie créée et commenter.

Exercice 4 : Installation frigorifique



On considère une installation frigorifique développant une puissance frigorifique de 100 kW. Le fluide frigorigène est l'ammoniac (réfrigérant R717 dont on donne le diagramme (P,h) en annexe). Il subit :

- Une compression isentropique $1 \rightarrow 2$ dans le compresseur.
- Une liquéfaction totale isobare $2 \rightarrow 3$ dans le condenseur. La température de la transition de phase est de 30°C. La température de sortie du liquide est de 25°C (on parle de sous-refroidissement puisque cette température est inférieure à celle de la transition de phase). Le fluide caloporteur fournit alors un transfert thermique massique à la source chaude q_1.
- Une détente de Joule – Thomson $3 \rightarrow 4$ dans le détendeur.
- une vaporisation totale isobare $4 \rightarrow 1$ dans l'évaporateur. La température de la transition de phase est de -10°C . La température de sortie du liquide est de 0°C (on parle de surchauffe puisque cette température est supérieure à celle de la transition de phase). Il reçoit alors un transfert thermique massique de la source froide q_2.

1. Représenter le cycle dans le diagramme (P, h). Dresser un tableau des pressions, températures, enthalpies massiques et titres massiques en vapeur x aux différents points du cycle.
2. Déterminer :
- le débit de masse du fluide.
- la puissance mécanique théorique *P*u du compresseur.
- la puissance mécanique réelle. On prendra un rendement mécanique $\eta_m = 0{,}90$ et un rendement thermodynamique (le cycle décrit est un modèle : il y a notamment des pertes de charge) $\eta_{th} = 1 - 0{,}05\frac{P_{cond}}{P_{évap}}$ où P_{cond} et $P_{évap}$ sont respectivement les pressions dans le condenseur et dans l'évaporateur.
- les efficacités théorique (appelée C.O.P : coefficient de performance) et réelle de l'installation.
- l'efficacité η_C du cycle de Carnot décrit par le fluide dont la température varie entre -10°C et 30°C, ainsi que le rendement de l'installation, défini par : $r = \frac{COP_{réel}}{\eta_C}$.
- la puissance à évacuer au condenseur.
3. Indiquer l'intérêt de la surchauffe et du sous-refroidissement.

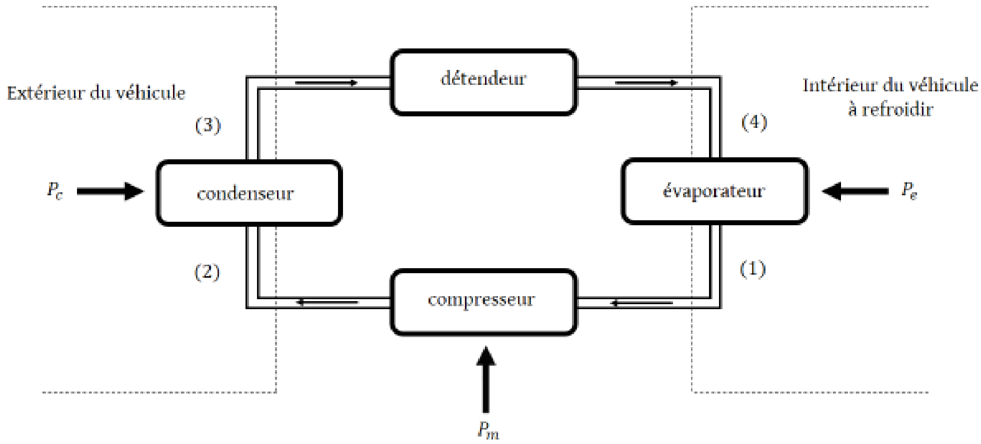
Exercice 5 : Climatisation de véhicule automobile

La quasi-totalité des véhicules neufs sont aujourd'hui équipés d'une climatisation. Pour refroidir l'air intérieur du véhicule, un fluide frigorigène, l'hydrofluorocarbone HFC connu sous le code R134a, effectue en continu des transferts énergétiques entre l'intérieur, l'extérieur du véhicule et le compresseur.
Sur le diagramme enthalpique (p, h) (cf. annexe) de l'hydrofluorocarbone HFC, de masse molaire $M = 32\ g.mol^{-1}$, sont représentés :

- la courbe de saturation de l'équilibre liquide-vapeur de l'hydrofluorocarbone HFC (en trait fort)
- les isothermes pour des températures comprises entre -40 °C et 160 °C par pas de 10 °C
- les isentropiques pour des entropies massiques comprises entre $1{,}70\ \mathrm{kJ.kg^{-1}.K^{-1}}$ et $2{,}25\ \mathrm{kJ.kg^{-1}.K^{-1}}$ par pas de $0{,}05\ \mathrm{kJ.kg^{-1}.K^{-1}}$
- les isotitres en vapeur sous la courbe de saturation pour des titres massiques en vapeur x_v variant de 0 à 1 par pas de 0,1.
- P est en bar et h en $\mathrm{kJ.kg^{-1}}$.

1) Dans quel domaine du diagramme le fluide à l'état gazeux peut-il être considéré comme un gaz parfait?

On étudie dans la suite l'évolution du fluide au cours d'un cycle en régime permanent. Le débit massique est $D_m = 0{,}1\ \mathrm{kg.s^{-1}}$. Voici le schéma de principe du climatiseur :



- La puissance thermique P_e reçue par le fluide dans l'évaporateur permet la vaporisation isobare complète du fluide venant de l'état (4) et conduit à de la vapeur à température $T_1 = 5$ °C et pression $p_1 = 3$ bar : c'est l'état (1).

- Le compresseur aspire la vapeur (1) et la comprime de façon isentropique avec un taux de compression $r = p_2/p_1 = 6$. Elle est alors dans l'état (2).

- Le fluide sortant du compresseur entre dans le condenseur dans lequel il est refroidi de manière isobare et liquéfié intégralement à la température $T_3 = 60$ °C : c'est l'état (3), liquide juste saturant, sans vapeur.

- Le fluide sortant du condenseur est détendu dans le détendeur supposé adiabatique jusqu'à la pression de l'évaporateur p_1 : le fluide est alors dans l'état (4).

2) Quelle hypothèse vous paraît-il raisonnable de faire concernant la transformation dans le détendeur ? Placer le point (4) sur le diagramme et tracer le cycle complet.
3) Déterminer la valeur de la puissance mécanique P_m reçue par le fluide lors de son passage dans le compresseur. Commenter.
4) Calculer la puissance thermique P_e échangée par le fluide lors de son passage à travers l'évaporateur entre (4) et (1). L'air situé à l'intérieur du véhicule est-il refroidi?
5) Définir l'efficacité e (ou coefficient de performance) du climatiseur. Calculer sa valeur.
6) Comparer cette valeur à celle d'un climatiseur de Carnot fonctionnant entre les deux températures de changement d'état du fluide. Commenter le résultat obtenu.

Exercice 6 : Centrale thermique de Porcheville

La centrale EDF de Porcheville reçoit de la chaleur issue de la combustion de fioul, et utilise un cycle à vapeur pour alimenter une génératrice électrique. Dans la centrale l'eau évolue entre les pressions de 1 bar et 100 bar. Les turbines ont une efficacité par rapport au cas idéal isentropique de 80 %. On suppose que le cycle suivi par l'eau dans la centrale est un cycle de Rankine surchauffé.

L'installation se compose des éléments suivants :

- une pompe (Po) qui réalise une compression supposée isentropique de l'eau liquide ; l'eau liquide y passe de l'état (1) à l'état (2).
- un générateur de vapeur (GV) qui réalise un échauffement du liquide juste saturant de l'état (2) à l'état (3), suivi d'une vaporisation isobare complète de l'état(3) à l'état (4) (où la vapeur est donc juste saturante).
- un surchauffeur (S), qui échauffe la vapeur à pression constante de l'état (4) (vapeur saturante) à l'état (5) (vapeur sèche) ; cet échauffement est réalisé par échange thermique avec les gaz issus de la combustion.
- une turbine (Tb) où le fluide subit une détente adiabatique réversible en fournissant le travail mécanique utile recherché dans cette machine ; le fluide y passe de l'état (5) (vapeur sèche) à l'état (6) (vapeur juste saturante).
- un condenseur (C) dans lequel le fluide se condense complètement à pression constante, passant de l'état (6) (vapeur juste saturante) à l'état (1) (liquide).

On suppose que l'on est en régime permanent. Les pressions de changement d'état sont donc 1,0 bar et 100 bar (température d'ébullition à 100 bar : 310 °C). Les autres valeurs numériques sont à déterminer par lecture des diagrammes (P, h), (T, s) et (h, s) de l'eau (cf. annexe).

1) Que peut-on dire des entropies massiques, enthalpies massiques et températures de l'eau dans les deux états (1) et (2) comme pratiquement indiscernables d'un point de vue thermodynamique ?
2) Représenter l'allure du cycle en coordonnées (P, h) et (T, s) sachant que l'eau en sortie de turbine est à l'état de vapeur juste saturante, sans eau liquide.
3) Déterminer la température T_5 en sortie du surchauffeur pour que le l'eau à la sortie de la turbine soit effectivement constituée de vapeur juste saturante, sans eau liquide.
4) Calculer le transfert thermique reçu par l'unité de masse de fluide en écoulement permanent dans le générateur de vapeur (GV) et dans le surchauffeur (S).
5) Proposer une définition du rendement r, et le calculer numériquement.
6) Quelle est la consommation spécifique de l'installation, c'est-à-dire la masse de vapeur ayant pénétré la turbine lorsque l'installation a généré 1 kWh d'énergie mécanique ?
7) Quel débit de masse de vapeur faut-il faire circuler dans le circuit pour obtenir une puissance mécanique de 60 MW ?

La centrale est alimentée au fioul lourd dit « TBTS », de masse volumique 1 050 $kg.m^{-3}$ et de pouvoir calorifique 40,2 $MJ.kg^{-1}$. Dans la chaudière, l'eau est chauffée par contact thermique avec un circuit d'air chauffé par la combustion du fioul. L'air pénètre dans la chaudière à température de 15 °C et pression de 1 bar. Il est porté à température de 820 °C à pression constante, avant de passer autour des conduits d'eau. Lorsqu'il quitte la chaudière, sa température est de 180 °C. On donne la capacité thermique massique de l'air à pression constante : $c_{P,air} = 1{,}0$ kJ.K^{-1}.kg^{-1}.

8) Quel débit d'air faut-il admettre dans la chaudière pour maintenir une puissance mécanique nette de 60 MW ? Quelle est l'efficacité de la chaudière ? Quel est le débit de volume du carburant ?

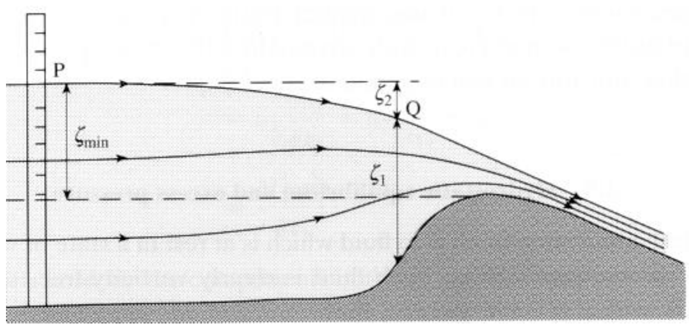
2. Bilans d'énergie mécanique pour des écoulements incompressibles

Exercice 7 : Mesure du débit d'un canal

Les ingénieurs hydrauliciens ont parfois recours à un dispositif très simple pour contrôler le débit d'un écoulement dans un canal : il s'agit de faire passer l'écoulement au-dessus d'une « bosse » disposée transversalement au fond du canal et dont le profil n'est pas trop « abrupt ». L'écoulement est alors accéléré et l'altitude de sa surface libre diminue simultanément ; la mesure de la distance ζ_{min} définie sur la figure, permet d'en déduire le débit volumique par unité de largeur du canal. C'est ce que nous allons montrer.

Pour cela, on suppose que les lignes de courant sont supposées rester **quasiment** parallèles à la direction Ox qu'elles avaient en amont de l'obstacle (profil pas trop abrupt) mais que la hauteur de l'obstacle est telle que la vitesse de l'écoulement au point *Q* est très grande devant la vitesse mesurée au point *P* en amont. On suppose également que la vitesse de l'écoulement est uniforme sur toute section droite de celui-ci.

1. Quelles hypothèses sur l'écoulement vous paraissent – elles plausibles et nécessaires ?
2. Trouver la relation liant la vitesse v_Q et ζ_2, hauteur dont la surface libre a baissé au point *Q* par rapport à la région amont.
3. Exprimer le débit de volume D par unité de largeur du canal en fonction de v_Q et de ζ_1, profondeur du canal au point considéré.
4. En déduire que la différence d'altitude entre la surface libre en amont et le point culminant de la bosse vaut : $\zeta_{min} = \frac{3}{2}\left(\frac{D^2}{g}\right)^{1/3}$.
5. On mesure une dénivellation $\zeta_{min} \approx 50$ cm. Que vaut le débit de volume du canal de largeur 3 m et de profondeur moyenne 2m ? Calculer la vitesse débitante du canal. Vérifier la validité des hypothèses.



Exercice 8 : Ondes de gravité en eau peu profonde

On étudie la propagation de vagues à la surface de l'eau contenue dans un bassin sur une profondeur d. En plus d'autres hypothèses que vous ferez vous-même, on fait les hypothèses suivantes :

(i) on est en eau peu profonde, i.e. $d \ll \lambda$.
(ii) l'amplitude des vagues, notée ζ est très inférieure à la profondeur moyenne d.

1. Dans quel référentiel se placer pour étudier cet écoulement, et pourquoi ? Représenter l'allure des lignes de courant dans ce référentiel.
2. Dans ce référentiel, justifier le fait que l'on puisse négliger la composante verticale v_z de la vitesse de l'écoulement devant sa composante horizontale v_x.

On suppose dans la suite que le champ des vitesse est de la forme $\vec{v} \approx v(x)\overrightarrow{u_x}$. On note $\langle v \rangle$ la vitesse moyenne de l'écoulement, correspondant à la valeur de v aux points où la profondeur vaut d, profondeur moyenne.

3. En un point de profondeur $d + \zeta$, la vitesse de l'écoulement vaut $\langle v \rangle + \Delta v$, Δv étant un terme correctif très inférieur à $\langle v \rangle$. Montrer que : $\langle v \rangle\, \zeta + d\, \Delta v \approx 0$.
4. En émettant certaines hypothèses raisonnables, montrer que $\langle v \rangle\, \Delta v + g\, \zeta \approx 0$.
5. En déduire $\langle v \rangle$ ainsi que la vitesse de propagation des ondes de gravité à la surface de l'eau.
6. Interpréter le fait que lorsqu'elles se brisent sur le rivage, les vagues lui sont en général quasi-parallèles.
7. Exprimer le nombre de Reynolds de l'écoulement associé à la propagation des vagues en fonction de la profondeur d et discuter la pertinence du modèle adopté.

Exercice 9 : Limitation de la vitesse des péniches

Péniche Freycinet sur le Canal Saint – Denis

Une péniche à fond plat se déplace dans un canal de profondeur H à vitesse constante $\overrightarrow{V_0}$. On suppose que la péniche est de grande longueur et on l'assimile à un parallélépipède rectangle (le fond a une aire S). On suppose l'écoulement unidirectionnel sous la péniche (assez loin des extrémités) et on suppose le champ des vitesses uniforme sur les sections où l'écoulement est unidirectionnel. Au repos, la péniche est immergée sur une hauteur $d < H$.

1. Dans quel référentiel convient-il de mener l'étude et pourquoi ? Dessiner l'allure des lignes de courant dans ce référentiel. Quelles hypothèses raisonnables pouvez-vous émettre ?
2. Déterminer la pression exercée par l'eau sur le fond de la péniche en fonction notamment de P_0, pression atmosphérique, V_0, H et h, hauteur d'eau sous la péniche en mouvement. Mettre en évidence et interpréter deux termes dont les effets sont opposés.
3. En déduire une relation entre le rapport $\frac{h}{H}$ et les nombres sans dimension : $\mathrm{Fr} = \frac{V_0^2}{gH}$ et $\frac{d}{H}$.
4. Montrer graphiquement qu'il existe deux profondeurs d'équilibre et en étudier graphiquement la stabilité.
5. Que se passe-t-il si V_0 augmente ? Montrer qu'au-delà d'une certaine vitesse critique V_0^{max} dont on précisera la définition mais non l'expression analytique, la péniche raclera le fond.

Le gabarit Freycinet est une norme européenne régissant la dimension des écluses de certains canaux, mise en place par une loi du programme de Charles de Freycinet datant du 5 août 1879. Elle portait la dimension des sas d'écluse à 39 m de long pour 5,20 m de large, afin qu'elles soient franchissables par des péniches de 300 t ou 350 t avec 1,80/2,20 m de tirant d'eau. En conséquence, les bateaux au gabarit Freycinet ne doivent pas dépasser 38,5 m sur 5,05 m.

6. On considère donc une péniche Freycinet de masse à vide 50 tonnes chargée de 350 tonnes de fret, naviguant sur le canal de Saint – Denis (cf. photo ci-dessus), dont la profondeur vaut $H = 3{,}20$ m. Déterminer son tirant d'eau d. Déterminer numériquement la vitesse critique V_0^{max}. Commenter.
7. Proposer une amélioration du modèle et la tester.

Exercice 10 : Microcentrale hydraulique

Ce type de centrale permet une production souple d'énergie électrique et une adaptation rapide en période de pointe. La centrale est alimentée par une conduite d'eau cylindrique de diamètre constant D, dite *conduite forcée*, issue du barrage (Fig. 1). La capacité de ce barrage est suffisamment importante pour que l'on considère l'eau qu'il contient comme immobile. L'extrémité aval de la conduite, notée A, est reliée à une tubulure de section décroissante, appelée *injecteur*.

On note H la dénivellation entre la surface libre de l'eau et l'axe de l'injecteur et h la différence de niveau entre l'entrée de la conduite et la sortie, en A. L'eau sort de l'injecteur à l'air libre, sous la pression atmosphérique P_0. Le jet est cylindrique d'axe horizontal et de section circulaire de diamètre D dans la conduite puis d dans l'injecteur. Ce jet frappe la turbine et l'anime d'un mouvement de rotation. On considère les écoulements comme permanents. On néglige tout frottement.

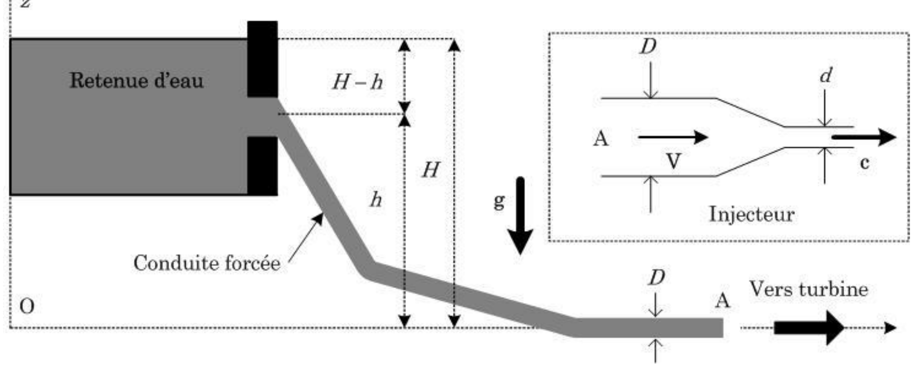


Fig. 1 - Retenue et conduite forcée pour installation hydroélectrique. L'injecteur, en A, est schématisé dans le rectangle en pointillés.

Données : $D = 60$ cm ; $H = 300$ m ; $H - h = 20$ m.

1. Dans cette question — et dans cette question seulement — on suppose que l'extrémité aval de la conduite n'est pas reliée à l'injecteur ; l'eau sort à l'air libre au point A. En justifiant votre raisonnement, exprimer la pression $P_1(z)$ à l'intérieur de la conduite sous la forme $P_1(z) = P_0\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)$ où z_0 est une constante dont on donnera l'expression.
2. La pression de vapeur saturante de l'eau à la température ambiante vaut $P_{sat} \approx 30$ mbar. Montrer qu'au-delà d'une certaine altitude à préciser, ce modèle de pression n'est plus applicable. Le phénomène qui intervient alors (cavitation) engendre toutes sortes de perturbation (attaque des matériaux, bruits …).
3. Pour pallier cet inconvénient, on visse en A sur la partie finale horizontale de la conduite un injecteur (encart de la Fig. 1) de section décroissante et de diamètre de sortie $d < D$. Calculer la vitesse en sortie de l'injecteur, notée c. Commenter ce résultat.
   En déduire l'expression de la vitesse en A est en fonction notamment des paramètres géométriques de l'installation.
4. Exprimer la pression $P_2(z)$ à l'intérieur de la conduite munie d'injecteur. Montrer que les phénomènes de cavitation disparaissent dans toute la conduite si d est inférieur à une certaine valeur d_0 que l'on calculera numériquement.
5. Le diamètre de sortie de l'injecteur est $d = 12$ cm. La vitesse du jet mesurée en sortie de l'injecteur est $c' = 74$ m.s^{-1}. A quelle dénivellation, notée H', cette vitesse correspondrait-elle ? Exprimer et calculer le *coefficient de contraction* $c_c = \frac{H'}{H}$. Pourquoi ce coefficient est-il inférieur à l'unité ? Calculer numériquement la perte de charge subie dans la conduite.
6. Calculer numériquement le débit de volume q de l'injecteur *sans pertes*, puis le débit de volume q' de l'injecteur *avec pertes.*
7. Exprimer et calculer la puissance cinétique *réelle* $\mathcal{P}_c'$ du jet en sortie de l'injecteur (c'est-à-dire le débit d'énergie cinétique).
8. Exprimer et calculer la puissance cinétique *sans pertes* $\mathcal{P}_c$ du jet en sortie de l'injecteur. Justifier que l'on puisse l'assimiler à la « puissance potentielle » $\mathcal{P}_{pot}$ disponible en sortie.
9. Exprimer et calculer le rendement de la conduite $\eta = \frac{\mathcal{P}_c'}{\mathcal{P}_{pot}}$ en fonction de c_c.

Exercice 11 : Anévrisme et athérome

On assimile le sang à un fluide parfait (!) de masse volumique $\rho_s = 1060$ kg.m^{-3} et on fait l'hypothèse qu'il s'écoule dans les artères en régime stationnaire (!!).

Angiographie d'un anévrisme sur une artère cérébrale

1) Anévrisme

Un anévrisme est une dilatation localisée de la paroi d'une artère aboutissant à la formation d'une poche de taille variable, communiquant avec l'artère au moyen d'une zone rétrécie que l'on nomme le collet. Sa forme habituelle est celle d'un sac, son diamètre pouvant atteindre plusieurs centimètres. La rupture d'anévrisme représente environ 10 % des accidents vasculaires cérébraux (AVC). Lorsqu'il se rompt, l'anévrisme entraîne une hémorragie interne pouvant, si la rupture est importante, rapidement entraîner la mort par compression d'organes vitaux (le cerveau pour les anévrismes cérébraux, le cœur pour les anévrismes localisés dans la crosse de l'aorte).

On considère une artère cérébrale de diamètre normal $d_n = 4$ mm, traversée par un débit sanguin $Q = 0{,}4$ L.min^{-1}, à la pression P_n. Un anévrisme d'un diamètre $d_a = 7$ mm (taille à partir de laquelle l'anévrisme devient dangereux) s'est formé sur cette artère : l'artère est donc localement plus large.
Calculer la pression P_a au niveau de cet anévrisme sachant que la pression normale dans une artère cérébrale est de 100 mm Hg. Quelle conséquence peut résulter de cette augmentation de pression ?

2) Athérome
Une artère horizontale de diamètre $d_n =$ 1,4 cm, supposée parfaitement cylindrique, est traversée par du sang avec un débit de volume $Q = 9{,}2$ L.min^{-1} de sang. La pression P_n dans l'artère est égale à 160 mbar. Cette artère est partiellement obturée par un athérome, amas graisseux réduisant le diamètre de l'artère à un diamètre réduit noté d_r. Lorsque la pression au niveau de la section rétrécie devient inférieure à la valeur $P_r = 16$ mbar, l'artère s'affaisse sur elle-même et se bouche : c'est la thrombose.
Calculer la valeur minimale du diamètre d_r avant que ne se produise le phénomène de thrombose.
Le sang est en réalité un liquide visqueux qui exerce des forces de frottements visqueux. Les valeurs de P_n et Q étant fixées, quel est l'effet des frottements visqueux sur la valeur du diamètre d_r ?

Exercice 12 : Clepsydre

Un réservoir cylindrique de section S contient de l'eau sur une hauteur h_0. On vidange ce réservoir par un orifice de section $s \ll S$ situé à sa base. Le régime d'écoulement du fluide est suffisamment lent pour être considéré comme une suite de régimes stationnaires, et l'on suppose que la vitesse du fluide est uniforme sur une section droite du jet de sortie.
A l'instant $t = 0$, on ouvre le robinet de vidange du récipient.

1. Moyennant des hypothèses plausibles, déterminer l'équation différentielle régissant la hauteur d'eau $h(t)$ présente dans le réservoir à l'instant t.
2. Résoudre cette équation différentielle et tracer la fonction $h(t)$.
3. En déduire le temps de vidange Δt du réservoir.
4. Comment pourrait-on réaliser une horloge à eau ou clepsydre à l'aide de ce dispositif ?
5. Quelle devrait être la forme du réservoir pour que la hauteur d'eau $h(t)$ varie de manière affine ? Quel en serait le bénéfice ?

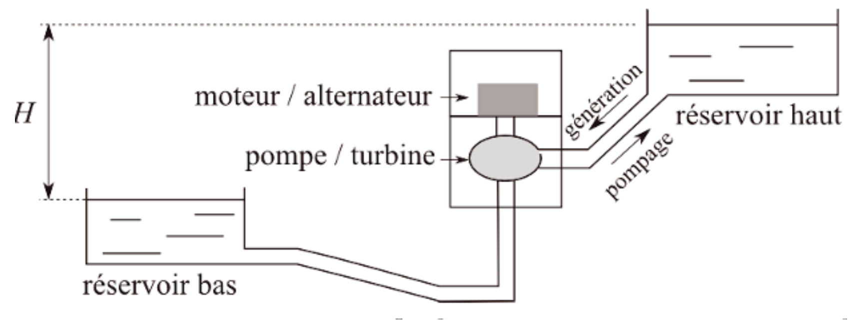
Clepsydre athénienne

Exercice 13 : Centrale hydroélectrique réversible de Revin (Ardennes)

Une S.T.E.P. est une Station de Transfert d'Energie par Pompage. L'énergie hydraulique est utilisée pour réguler le réseau électrique. Une S.T.E.P. est une installation qui fonctionne de façon réversible :

- Lorsque le réseau électrique produit un excès d'énergie, elle fonctionne comme une pompe qui fait remonter l'eau dans un réservoir situé en hauteur ;
- Lorsque le réseau présente une période de surconsommation, elle fonctionne comme une turbine qui génère de l'énergie électrique.

On s'intéresse à la S.T.E.P. schématisée ci-dessous :



La centrale de Revin (Ardennes), mise en service en 1976 et 3^{e} de France par la puissance (de l'ordre de 800 MW) a les caractéristiques suivantes. Le réservoir du haut a une superficie de 6,6.10^{5} m^{2} et un volume de 8,5 millions de m^{3}, le réservoir du bas a un volume de 9 millions de m^{3}. L'altitude de la surface libre du réservoir du haut varie entre $z_{H,max} =$ 406 m et $z_{H,min} =$ 395 m. La différence d'altitude entre les surfaces libres du réservoir du haut et du réservoir du bas est en moyenne égale à $H =$ 225 m. La station possède quatre groupes réversibles turbine-pompe identiques. Chaque groupe, en mode turbine, développe une puissance de 180 MW et en mode pompe, consomme une puissance de $P_0 =$ 164 MW. En mode turbine, le débit de volume dans chaque turbine est $D_T =$ 100 m^{3}.s^{-1}. La durée maximale de turbinage en continu est de 5 heures.

1. Avant le début du turbinage, le réservoir du haut était à son niveau maximum. Sous quelle forme l'énergie est-elle stockée avant le turbinage ? Calculer la valeur de l'énergie qui a été déstockée pendant les 5 heures de turbinage. (NB : deux approches sont possibles)
2. Estimer la puissance moyenne récupérable par chaque turbine. Comparer cette valeur à celle annoncée et commenter. Evaluer le rendement de chaque turbine.

Dans sa fonction de pompage, la S.T.E.P. a pour but de faire passer l'eau du réservoir du bas vers le réservoir du haut. On considère un groupe turbine-pompe, on note P_0 la puissance développée par le moteur qui actionne la pompe lorsque le régime permanent de pompage est établi et D_0 le débit de volume correspondant. Soit H_{th} la hauteur de pompage théorique qui serait obtenue s'il n'y avait aucune perte dans les tuyaux, d'aucune sorte.

3. Exprimer H_{th} en fonction notamment de P_0 et D_0.

On prend maintenant en compte les pertes et on note P_p la puissance totale dissipée dans une pompe. La hauteur de pompage est alors $H =$ 225 m.

4. Etablir la relation liant P_0, P_p, H et H_{th}. Exprimer le rendement de la pompe défini par $\eta = \frac{H}{H_{th}}$ en fonction de P_0 et P_p.
5. Le rendement de la pompe vaut $\eta =$ 95%. En déduire H_{th} et le débit de pompage D_0.

Exercice 14 : Aspirante soufflante

On considère l'expérience schématisée sur la figure ci-dessous : une soufflante propulse de l'air à la vitesse $U = 1$ m.s^{-1} dans un tuyau cylindrique vertical de rayon $a = 1$ cm sur lequel on a fixé une couronne (C) en bois de rayons interne a et externe $R = 10$ cm. Cette couronne est munie d'un rebord, non représenté sur la figure, qui canalise l'air sortant vers le bas, dans une direction faisant l'angle $\alpha = 45°$ avec la verticale. On approche lentement et verticalement le tuyau et la couronne d'un disque (D) en carton, de même rayon R et de masse $m = 10$ g, posé sur un support fixe (S). Lorsque la distance h entre (C) et (D) devient inférieure à une valeur critique h_c de l'ordre de quelques dixièmes de millimètre, le disque en carton se soulève et vient se paquer sur la couronne en bois et on entend des vibrations.

On suppose qu'au bord du disque (D), l'écoulement est unidimensionnel d'épaisseur h et que la pression est égale à la pression atmosphérique P_0.

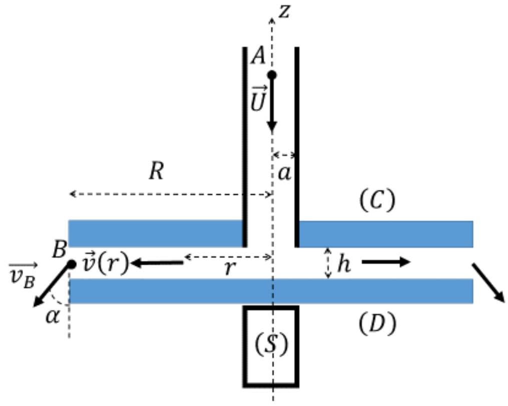
1. Peut-on supposer l'écoulement de l'air incompressible ? On justifiera la réponse.
2. Exprimer la vitesse v_B à la périphérie du disque en fonction de U, R, a, h et α.
3. Comparer la quantité de mouvement d'une particule de fluide à l'embouchure du tuyau (point A) et à la sortie de l'écoulement (point B). En déduire une première estimation de la distance critique $h_{c,0}$ si on néglige le poids du disque.

On envisage maintenant un modèle plus élaboré, tenant compte de la masse m du disque. Pour cela, on considère que l'écoulement est grossièrement séparable en deux zones :

- La zone centrale $r < a$ qui inclut le tuyau d'arrivée de l'air, où la vitesse est verticale et vaut grossièrement U ; la pression y est égale à P_e, supposée uniforme.
- La zone $a < r < R$ où la vitesse est quasi – horizontale et radiale ($\vec{v}(r) = v(r)\overrightarrow{u_r}$) et où la pression est notée $P(r)$.

4. En faisant des hypothèses adéquates, montrer que $\begin{cases} P_e = P_0 + \dfrac{\rho U^2}{2}\left(\dfrac{a^4}{2R^2h^2} - 1\right) \\ P(r > a) = P_0 + \dfrac{\rho U^2}{2}\dfrac{a^4}{2R^2h^2}\left(1 - \dfrac{R^2}{2r^2}\right) \end{cases}$.
5. En déduire que la résultante des forces de pression qui s'exerce sur le disque (D) s'écrit :
$$\vec{F} = \frac{\pi\rho U^2 a^4}{4h^2}\left(1 - \ln\left(\frac{R}{a}\right)\right)\overrightarrow{u_z}$$
6. Montrer enfin que la distance critique de sustentation est de la forme :
$$h_c = h_{c,0}\, f(m, U, a, R, g)$$
où l'on explicitera évidemment la fonction $f(m, U, a, R, g)$. Commenter sa forme. Calculer numériquement h_c et commenter le résultat.
7. Vérifier la validité des hypothèses faites. Qu'en pensez-vous ?
8. Interpréter la présence de vibrations une fois que le disque est collé à la couronne.

Données : masse volumique de l'air : $\rho = 1{,}2$ kg.m^{-3} ; viscosité dynamique de l'air : $\eta = 10$ µPa.s.



Exercice 15 : Aéroglisseur

Un aéroglisseur est assimilé à un cylindre creux de rayon $R = 5{,}0$ m, de masse $M = 8{,}0$ tonnes, dont la base (la « jupe ») se maintient à une hauteur $h = 3{,}0$ cm au-dessus d'un plan d'eau parfaitement plan. Il glisse sur un coussin d'air atmosphérique (de pression $P_0 = 1$ bar) aspiré par un ventilateur de section $s = 1{,}0$ m^2 situé dans sa partie supérieure. Cet air est aspiré avec une vitesse d'entrée V_e puis se répartit dans la cavité intérieure cylindrique de l'aéroglisseur où sa pression P_i est uniforme et sa vitesse négligeable. Il est ensuite expulsé sous la jupe circulaire de l'aéroglisseur, de manière horizontale radiale avec une vitesse V_s.

1. Calculer la pression P_i pour que l'aéroglisseur puisse demeurer en équilibre au-dessus du plan d'eau.
2. Moyennant des hypothèses que vous formulerez, calculer les vitesses d'entrée V_e et de sortie V_s.
3. Calculer la puissance du ventilateur et le coût énergétique d'un maintien en équilibre pendant une heure. Commenter.
4. Vérifier la validité des hypothèses faites.

Données : masse volumique de l'air : $\rho = 1{,}2$ kg.m^{-3} ; viscosité dynamique de l'air : $\eta = 10$ µPa.s.

Landing Craft Air Cushioned de l'US Navy

Exercice 16 : La Garonne au niveau du Pont de Pierre à Bordeaux

Lu sur le site : http://www.cleantechrepublic.com/2009/12/09/bordeaux-reve-dun-parc-hydrolien-dans-la-garonne/ :

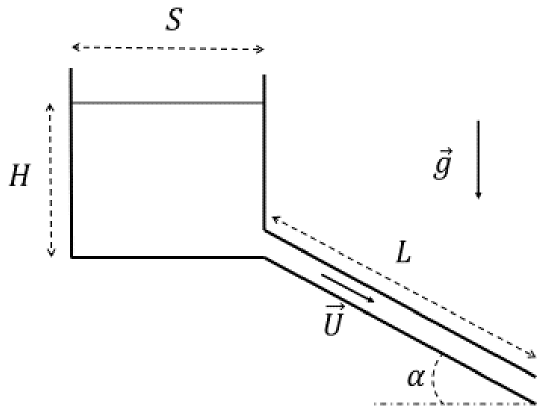
Dès 2007, deux amis bordelais, Marc Lafosse et Jérôme Cougoul, tous deux titulaires d'un DEA d'océanographie à Bordeaux 1 créent une société à l'intitulé poétique et évocateur « Energie de la lune » inspiré du nom même du Port de Bordeaux: le Port de La Lune. Ils expliquent alors : « *Nous voulons installer une ferme hydrolienne autour du Pont de pierre de Bordeaux pour produire de l'énergie verte* ». Les deux jeunes entrepreneurs qui travaillent sur le projet depuis déjà un an ne s'aventurent pas en eaux troubles. Ils connaissent la production exacte qu'une ferme hydrolienne pourrait fournir. S'ils veulent installer des hydroliennes au niveau du pont, ce n'est pas un hasard : « *Avant le pont, la Garonne est, en moyenne, profonde de 17 mètres et large de 500 mètres. Au niveau du pont et cela en moins de 20 mètres, la profondeur maximale passe à 7 mètres alors que le fleuve va passer sous les 15 arches. Le courant est alors beaucoup plus fort. On passe de 2 mètres par seconde à 3,50 voire 3,80 à 3,90 par gros coefficient en marée montante* ». Grâce à un courantomètre installé par le Port autonome de Bordeaux sous la pile du pont où passent les barges de l'Airbus A 380, des projections sont réalisées qui laissent espérer « une production minimale de 4,8 gigawatts-heure, soit pas moins de 20% de l'énergie nécessaire à l'éclairage public de Bordeaux ».

Dans cet exercice, nous allons tâcher d'évaluer la variation de la hauteur d'eau de la Garonne au voisinage des 16 piles du Pont de Pierre, chacune étant large de 7,50 m. Chacune des 17 arches est large de 20 m.
On suppose que la Garonne est en écoulement permanent sur une largeur $L = 500$ m. On note x l'abscisse d'un point mesurée dans le sens de l'écoulement. La hauteur d'eau $h(x)$ dépend de x et la vitesse de l'écoulement est supposée horizontale et uniforme sur une section droite du fleuve : $\vec{v} = v(x)\overrightarrow{u_x}$.

1. Montrer que $h + \frac{v^2}{2g} = h_s$ où h_s est une constante caractéristique de l'écoulement du fleuve en un lieu donné et à une date donnée, nommée « charge spécifique ». Dans quel intervalle est comprise la charge spécifique h_s au niveau du Pont de Pierre ?
2. Exprimer le débit de volume Q du fleuve en fonction notamment de h et h_s. Tracer la courbe représentative de $Q(h)$.
3. Le débit Q étant fixé, montrer graphiquement qu'il existe deux valeurs possibles h_1 et h_2 pour h. L'une des deux correspond au régime dit « torrentiel », l'autre au régime « fluvial ». Attribuer à chacune des deux valeurs h_1 et h_2 le régime qui lui correspond.
4. De quel régime relève l'écoulement de la Garonne au niveau du Pont de Pierre ? On justifiera la réponse quantitativement.
5. La présence des piles du Pont de Pierre fait passer la largeur du fleuve de L à $L(1-\varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$. Cette modification de la largeur du fleuve entraîne une modification Δh algébrique de la hauteur d'eau, qui passe de h à $h + \Delta h$.
   Que doit vérifier le débit de volume Q ? Montrer que $\Delta h \approx \frac{2h(h_s-h)}{2h_s-3h}\varepsilon$.
6. Comment évolue la hauteur d'eau dans le cas d'un régime torrentiel ? fluvial ?
7. Evaluer l'ordre de grandeur de Δh au niveau des piles du Pont de Pierre. Commenter. Que pensez-vous de la validité des calculs faits ? Proposer une solution numérique.

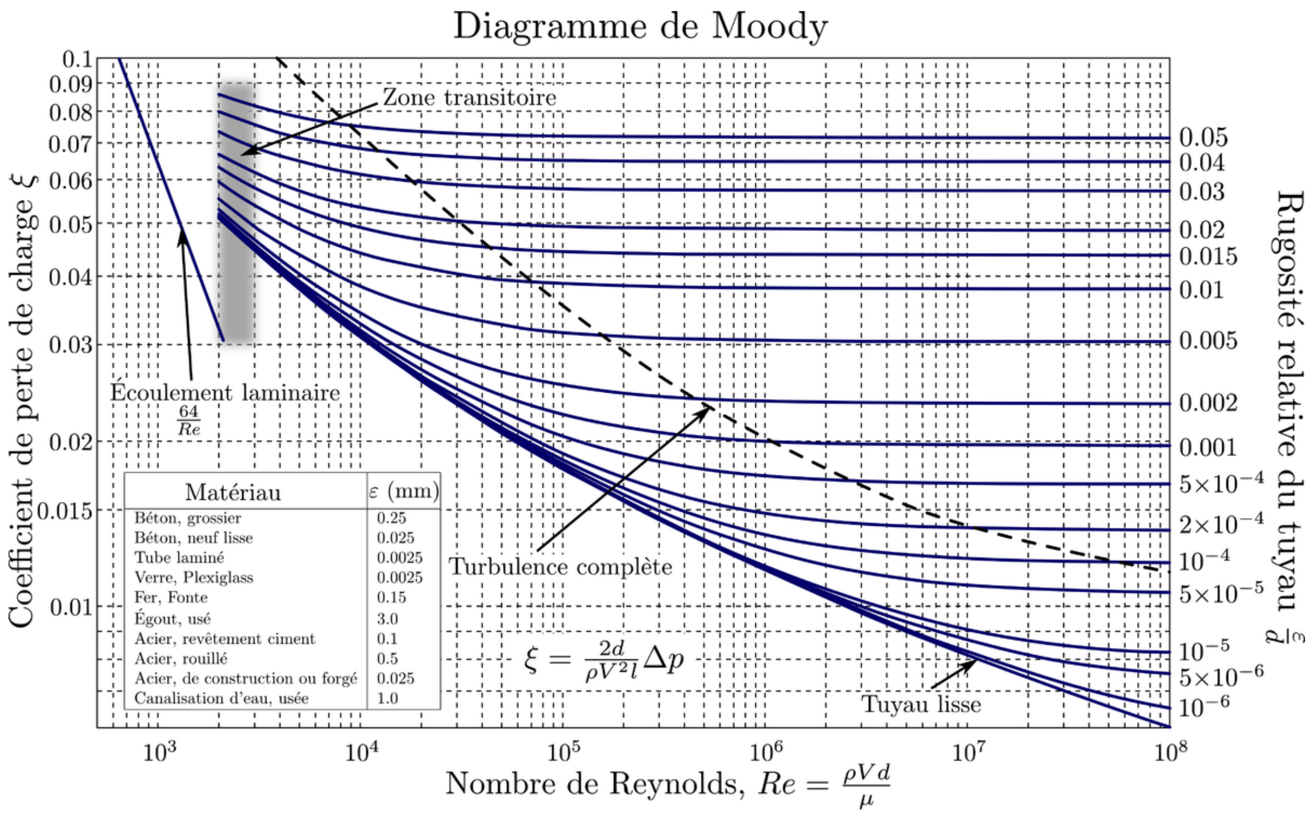
Exercice 17 : Point de fonctionnement d'une conduite

Dans une raffinerie, un réservoir cylindrique de section $S = 100$ m^2 contient à l'air libre une huile minérale sur une hauteur $H = 20$ m. A sa base, une conduite cylindrique (très) corrodée de diamètre $D = 40$ cm, de rugosité absolue $\varepsilon = 12$ mm (!!!) et de longueur totale $L = 80$ m fait un angle $\alpha = 30°$ vers le bas avec l'horizontale et débouche au-dessus d'un autre réservoir également à l'air libre. L'huile est de masse volumique $\mu = 1000$ kg.m^{-3} et de viscosité dynamique $\eta = 1{,}0$ Pa.s.



On cherche à déterminer le débit de volume Q et la vitesse débitante en sortie de la conduite. Les pertes de charge sont les suivantes :

- Singulière au raccordement entre le réservoir et la conduite : $\Delta P_s = 0{,}2 \cdot \frac{\mu U^2}{2}$
- Régulière dans la conduite : $\Delta P_r = f\left(\frac{\varepsilon}{D}, \mathrm{Re}\right) \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\mu U^2}{2}$ où le coefficient de friction $f\left(\frac{\varepsilon}{D}, \mathrm{Re}\right)$ est donné par le diagramme de Moody ci-dessous :



1. Ecrire la relation liant U aux grandeurs H, L, D, g et $f\left(\frac{\varepsilon}{D}, \mathrm{Re}\right)$.
2. En déduire une relation du type : $f\left(\frac{\varepsilon}{D}, \mathrm{Re}\right) = g(\mathrm{Re})$ et procéder à une approximation raisonnable.
3. En déduire Re par une résolution graphique, puis U et Q.

3. Bilans de quantité de mouvement et de moment cinétique

Exercice 18 : Tir vertical d'Ariane 5

On envoie verticalement et sans vitesse initiale, depuis Kourou, une fusée Ariane 5 de masse totale au décollage $m_0 = 780$ tonnes. Les réacteurs de la fusée expulsent des gaz avec une vitesse $\vec{u}$ par rapport à la fusée ($\vec{u}$ est verticale et possède une norme constante $u = 3000$ m.s^{-1}), et un débit de masse q_m constant. On note $m_p = 480$ tonnes la masse initiale de carburant utilisé lors du lancement (propergol). On suppose que le champ de pesanteur est uniforme. La fusée est repérée par son altitude z (prise nulle lorsque la fusée se trouve sur le sol).

1. Les 520 tonnes de carburant sont consommées en 130 s. Estimer le débit de masse q_m.
2. En faisant un bilan de quantité de mouvement, déterminer la force de poussée $\vec{\pi}$ que subit la fusée. La fusée décolle-t-elle ?
3. Calculer la vitesse v_1 et l'altitude z_1 atteintes à la date t_1 pour laquelle le carburant de lancement est totalement consommé, en négligeant les frottements de l'air. Le CNES annonce une vitesse de 8000 km.h^{-1} après 2 minutes de vol. Commenter.
   Donnée : $\int \ln x \, dx = x \ln x - x$.

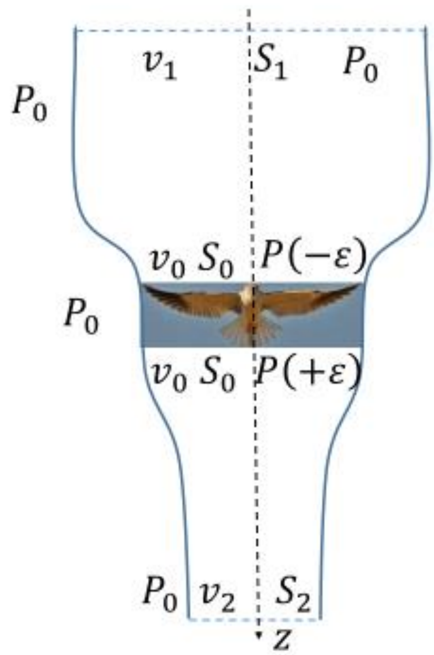
A l'issue de cette première phase de lancement, les deux réservoirs (pesant chacun 40 tonnes) contenant les propergols sont largués. L'ascension se poursuit grâce à l'Etage de Propulsion Cryogénique qui brûle des ergols liquides de masse initiale $m_e = 120$ tonnes et exerce une poussée de 1350 kN. Cette deuxième phase dure $\Delta t_2 = 7$ minutes.

4. Calculer le nouveau débit de carburant q'_m et la nouvelle vitesse d'éjection u' des gaz brûlés.
5. En déduire la vitesse v_2 et l'altitude z_2 atteintes à la date t_2 pour laquelle tout le carburant de lancement a été consommé
6. Calculer la vitesse et l'altitude de la fusée pour $t > t_2$. En déduire la date t_3 à laquelle la fusée retombe sur le sol. (NB : on déterminera l'altitude maximale atteinte.)

Exercice 19 : Vol des oiseaux

Le but de cet exercice est de dégager les lois d'échelle liant la puissance $\mathcal{P}$ dépensée par l'oiseau pour se maintenir en vol et la fréquence f des battements des ailes de l'oiseau à son envergure L.

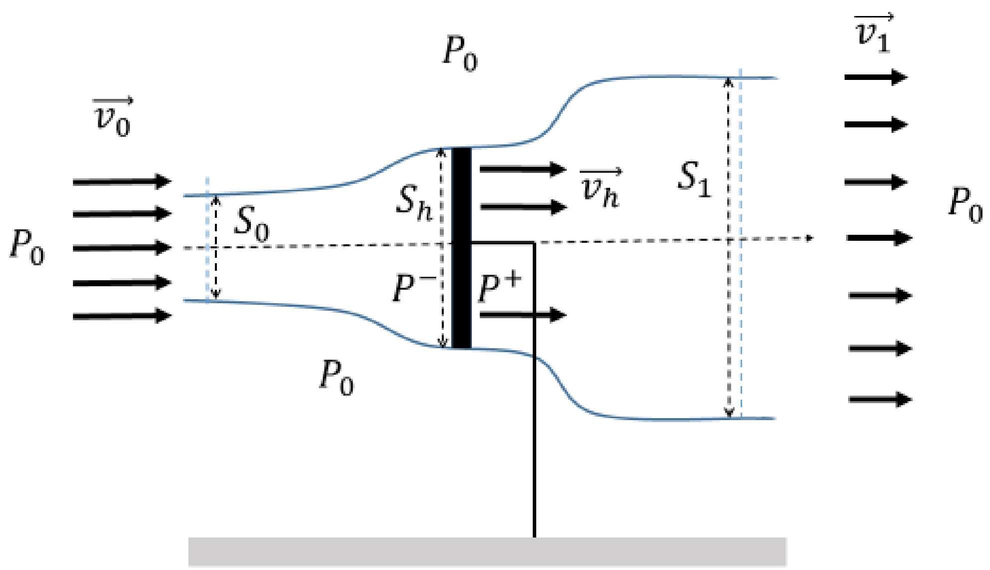
On considère un oiseau en vol stationnaire au voisinage d'un point O. Pour se maintenir en vol, l'oiseau bat des ailes, ce qui crée un écoulement d'air quasi-unidimensionnel vers le bas, dans un tube de courant dont la section est S_1 très au-dessus de l'oiseau, S_0 au voisinage de l'oiseau, et S_2 loi au-dessous de l'oiseau. On suppose que $S_1 \ll S_0$ et $S_1 \ll S_2$. Sur les bords du tube de courant et sur les sections S_1 et S_2, la pression est uniforme, égale à la pression atmosphérique P_0. L'écoulement est supposé stationnaire, sauf au voisinage immédiat de l'oiseau, entre les plans de cotes $z = \pm\, \varepsilon$. On note v_0, v_1 et v_2 les vitesses associées aux sections S_0, S_1 et S_2. On néglige les effets de la pesanteur sur l'air.



1. Justifier que l'on puisse négliger v_1 devant v_0 et v_2.
2. En faisant un bilan de quantité de mouvement, exprimer la force $-F\overrightarrow{u_z}$ exercée par l'écoulement sur l'oiseau.
3. Calculer la différence de pression $P(+\varepsilon) - P(-\varepsilon)$. En déduire que l'expression de F en fonction notamment de v_0 et S_0.
4. En faisant un bilan d'énergie cinétique, calculer la puissance $\mathcal{P}$ fournie par l'oiseau à l'écoulement en fonction notamment de v_0 et S_0. Commenter le résultat.
5. Déterminer les lois d'échelle $\mathcal{P} \propto L^{\beta}$ et $f \propto L^{\gamma}$. Commenter. Les grands oiseaux ont-ils plus ou moins de facilité que les petits pour se maintenir en vol ?
6. Evaluer le nombre de Reynolds en fonction de L. Commenter.

Exercice 20 : Rendement de l'hélice d'une éolienne

On étudie ici l'interaction mécanique entre l'air en mouvement (le vent) et le rotor d'une éolienne. Le vent est supposé horizontal, uniforme et permanent de vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$ et il traverse l'hélice, supposée plane de diamètre D et d'axe (Ox). On suppose que l'écoulement se fait dans un tube de courant de symétrie de révolution autour de l'axe (Ox) de section droite d'aire variable $S(x)$, la zone extérieure, de pression uniforme P_0 n'étant pas affectée par le mouvement de l'hélice. Très en amont de l'hélice, la pression vaut P_0 et la vitesse du fluide $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$ sur la section droite du tube de courant d'aire S_0. Très en aval de l'hélice, la pression vaut P_0 et la vitesse du fluide $\overrightarrow{v_1} = v_1\overrightarrow{u_x}$ sur la section droite du tube de courant d'aire S_1. Dans le plan de l'hélice, la vitesse du fluide vaut $\overrightarrow{v_h} = v_h\overrightarrow{u_x}$ et la section droite du tube a une aire S_h. L'influence de l'hélice sur l'écoulement est modélisée en faisant intervenir une discontinuité de pression qui passe de P^- à P^+ à la traversée du plan de l'hélice.



1. En faisant un bilan de quantité de mouvement, calculer la force $\vec{F}$ exercée par le vent sur l'hélice.
2. En faisant les hypothèses ad hoc, calculer la différence de pression $\Delta P = P^- - P^+$. Exprimer la force $\vec{F}$ en fonction notamment de S_h, v_h et v_0.
3. Par un bilan d'énergie cinétique, calculer la puissance $\mathcal{P}$ fournie par le vent à l'éolienne en fonction notamment de S_h, v_h et v_0. Commenter le résultat.
4. On pose $\lambda = \frac{v_h}{v_0}$. Que peut-on dire de ce rapport ? Exprimer la puissance $\mathcal{P}(\lambda)$ en fonction notamment de λ, S_h et v_0. Tracer la courbe des variations de $\mathcal{P}(\lambda)$. Quelle est la valeur λ_{Betz} qui maximise la puissance reçue ? Calculer $\mathcal{P}_{max} = \mathcal{P}(\lambda_{Betz})$. C'est ce qu'on appelle la « limite de Betz ».
5. Le rendement mécanique r de l'éolienne est défini comme le rapport de la puissance qu'elle reçoit à la puissance que recevrait l'aire S_h sous forme cinétique, en l'absence d'hélice. Donner l'expression du rendement $r(\lambda)$ de l'hélice et préciser la valeur du rendement maximal r_{max}.

On examine les fiches techniques de deux éoliennes de types très différents : l'une de faible puissance, destinée à être montée sur un petit voilier pour l'alimenter en énergie électrique ; l'autre de très forte puissance, destinée à produire de l'énergie électrique pour alimenter un réseau de distribution régional. Pour chacune, la fiche technique indique, entre autres données, le diamètre D du rotor, la vitesse « nominale » du vent pour laquelle elle a été conçue préférentiellement et pour laquelle elle fournit sa puissance « nominale » $\mathcal{P}_{nom}$. Les fiches techniques sont établies en prenant pour l'air une masse volumique $\rho = 1{,}225$ kg.m^{-3}.

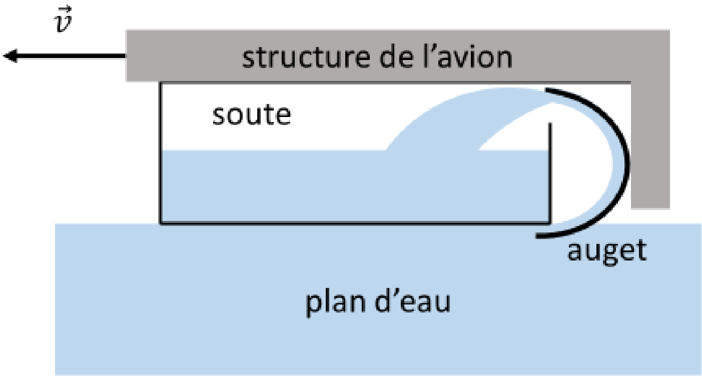
Type d'éolienne	D (m)	v_0 (m.s^{-1})	$\mathcal{P}_{nom}$ (kW)
Voilier	1,14	12	0,40
Réseau	47	15	660

6. Commenter quantitativement ces données à la lumière des résultats précédents.

Exercice 21 : Bombardier d’eau

Le bombardier d’eau CL 415, familièrement appelé Canadair, est un avion engagé dans la lutte contre les incendies. Propulsé par deux moteurs de 1,8 MW, il effectue des remplissages (ou écopages) en effleurant la surface d’un plan d’eau avec une vitesse $V = 120$ km.h^{-1}. L’eau s’engouffre alors dans les soutes au moyen de deux écopes ou augets de section rectangulaire $s_a = 11{,}8 \times 6{,}5$ cm^2. Le volume cumulé des deux soutes vaut $V_{soutes} = 6137$ L. On suppose que l’auget est placé dans un environnement à la pression atmosphérique P_0.

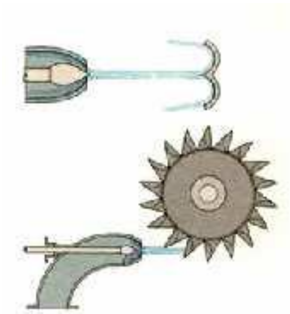
1. Calculer la durée Δt_r de remplissage des deux soutes et la distance d_r qu’il faut parcourir sur le plan d’eau pour les remplir.



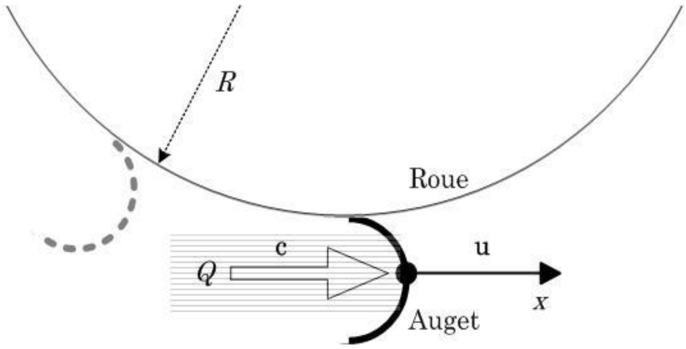
Le remplissage d'une soute se fait par l'intermédiaire d'un auget orienté dans le sens du déplacement de l'avion, qui renvoie les veines d'eau dans le sens opposé à la direction du jet incident. La section droite du jet d'entrée est égale à la section s_a d'une écope. La hauteur de l'auget (son diamètre) est de 50 cm.

2. Dans quel référentiel convient-il de travailler et pourquoi ? Quelles hypothèses raisonnables proposez-vous pour qualifier l'écoulement ?
3. Montrer, en quantifiant l'approximation effectuée, que la section du jet en sortie de l'auget est la même que la section d'entrée.
4. Calculer la résultante des forces exercées par tous les fluides (eau et air) sur l'auget et la puissance qu'elle développe. Commenter le résultat.

Exercice 22 : Turbine Pelton



La turbine Pelton est constituée par une roue munie d'augets. Un auget Pelton est un double godet avec une cloison au milieu qui dédouble le jet en deux parties identiques. Les deux parties s'écoulent parallèlement au jet incident mais en sens opposé. L'eau, en provenance d'un injecteur, est propulsée sur ces augets et met la roue en mouvement. Dans le référentiel terrestre, la vitesse du jet d'eau, est notée $c\overrightarrow{u_x}$. On néglige l'effet de la pesanteur sur les jets. Le rayon R du rotor est suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler le déplacement des augets à une translation rectiligne suivant l'axe (Ox) dans la zone d'action du jet. Sous l'action du jet incident de section S, de l'air et des actions exercées par la roue, l'auget se déplace donc à la vitesse $v\overrightarrow{u_x}$. Par souci de simplicité, on considérera, somme sur la figure ci-dessous, que les augets sont simples, et non doubles.



1. Dans quel référentiel l'écoulement est-il strictement stationnaire ? Quelles hypothèses raisonnables proposez-vous pour qualifier l'écoulement dans ce référentiel ?
2. Justifier que la pression est uniforme sur une section droite d'un jet mince parallèle à l'air libre. Que vaut-elle ?
3. Déterminer la vitesse de sortie des jets « réfléchis » par l'auget dans le référentiel de l'auget, puis dans le référentiel terrestre.

On travaille dorénavant exclusivement dans le référentiel terrestre et on supposera l'écoulement quasi-stationnaire dans ce référentiel pendant le court intervalle de temps où le jet est en contact avec l'auget étudié.

4. Par un bilan de quantité de mouvement, montrer que la force subie par l'auget de la part du jet est donnée par : $\vec{F} = 2\rho Sc(c-v)\overrightarrow{u_x}$.
5. Par un bilan de moment cinétique, déterminer le couple Γ exercé par le jet sur le rotor. Retrouver ce résultat à partir de l'expression de $\vec{F}$.
6. Par un bilan d'énergie cinétique, déterminer la puissance $\mathcal{P}$ fournie par le jet au rotor. Retrouver ce résultat à partir des expressions de $\vec{F}$ d'une part, de Γ d'autre part.
7. Définir et calculer le rendement r de la turbine. On l'exprimera sous la forme $r(X)$ où $X = \frac{v}{c}$. Pour quelle valeur X_0 de X, ce rendement est-il maximal ? Que vaut r_{max} ? Commenter.
8. Le rotor tourne à la vitesse angulaire de 750 tours par minute et la vitesse du jet incident vaut $c = 74$ m.s^{-1}. Calculer le rayon R du rotor pour atteindre le rendement maximum. Pour un débit de 1500 litres par seconde, calculer la puissance maximale $\mathcal{P}_{max}$. Le rendement réel de la turbine est égal à 0,87. Calculer la puissance réelle $\mathcal{P}$ de la turbine. Pourquoi n'atteint-on pas le rendement maximum ?

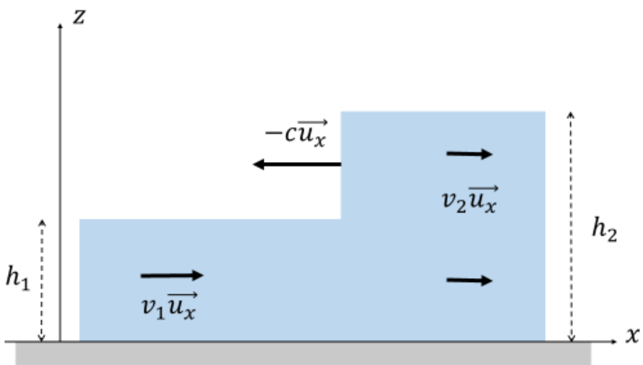
On s'intéresse enfin au démarrage de la turbine. Le rotor, de moment d'inertie J, est soumis au jet incident et maintenu immobile par un frein. A l'instant initial $t = 0$, on débloque le frein, et la turbine se met à tourner à la vitesse angulaire $\omega(t)$, entraînant une charge exerçant sur elle un couple résistant $-\Gamma_c$ où $\Gamma_c > 0$.

9. Déterminer l'équation différentielle régissant $\omega(t)$. A quelle condition la turbine peut-elle démarrer ? Quelle est la vitesse angulaire ω_∞ atteinte en régime permanent ? Déterminer l'expression de $\omega(t)$ et tracer sa courbe représentative.
10. Quelle est la puissance $\mathcal{P}_c$ fournie à la charge en régime permanent ? Pour quelle charge Γ_c cette puissance est-elle maximale ? Que vaut alors vitesse angulaire ω_∞ ? Que vaut la puissance maximale récupérable par la charge ? Commenter en lien avec l'étude précédente.

Exercice 23 : Le mascaret de la Gironde

Lorsque la marée commence à monter, l'eau de l'océan s'engouffre dans l'estuaire de la Gironde. Le flux de la marée se heurte alors au courant descendant du fleuve, et une série de vagues se forment. Elles constituent ce qu'on appelle un mascaret, qui grossit au fur et à mesure de sa progression, sa hauteur pouvant atteindre deux mètres. Cette série de 5 à 10 vagues se déplace à une vitesse de 15 à 30 km.h^{-1} et remonte ainsi le fleuve sur près de 200 km à l'intérieur des terres.

On modélise le fleuve par un canal horizontal de largeur L constante. En amont de la vague, le fleuve s'écoule (vers l'embouchure) à la vitesse $\overrightarrow{v_1} = v_1\overrightarrow{u_x}$ et sa profondeur vaut h_1. Le mascaret est modélisé par une marche (discontinuité de hauteur d'eau) : en aval du front de la vague, la hauteur d'eau est h_2 avec $h_2 > h_1$. La hauteur de la marche est donc $H = h_2 - h_1$. On suppose que le mascaret se déplace vers l'amont à la vitesse constante $-c\overrightarrow{u_x}$.



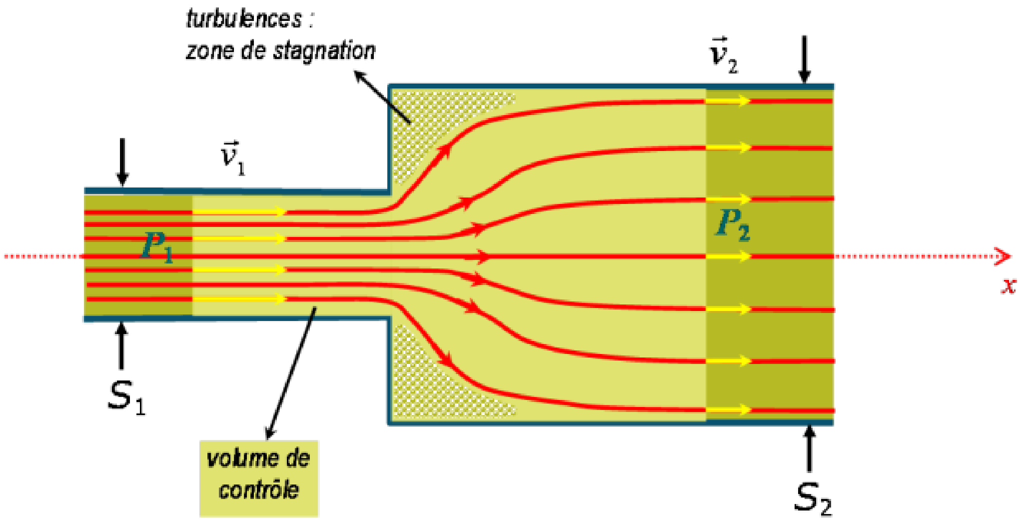
1. Dans quel référentiel est-il astucieux de travailler et pourquoi ? Dans ce référentiel, donner les expressions des vitesses des écoulements amont $\overrightarrow{v_1'}$ et aval $\overrightarrow{v_2'}$ en fonction notamment de v_1, c, h_1 et h_2.
2. Justifier que dans les deux zones amont et aval, où l'écoulement est unidimensionnel, la répartition de la pression est de type hydrostatique. Donner les lois de pression $P_1(z)$ et $P_2(z)$ dans ces deux domaines (on choisit l'origine des z au fond du fleuve).
3. A l'aide d'un bilan de quantité de mouvement, montrer la relation : $(c + v_1)^2 = g\frac{h_2}{h_1}\frac{h_1+h_2}{2}$.
4. On considère la situation où $h_1 = 10$ m et $h_2 = 12$ m. A quelle condition le mascaret parvient-il à remonter le fleuve ? La vitesse du mascaret est-elle plus ou moins grande lors des marées de vives eaux ou de mortes eaux ?
5. En effectuant un bilan d'énergie cinétique, montrer que la puissance dissipée dans le mascaret s'écrit : $\mathcal{P}_{diss} = -\frac{\rho g L(h_2-h_1)^3(c+v_1)}{4h_2}$. La calculer numériquement pour $L = 100$ m et commenter.

Exercice 24 : Evaluation d'une perte de charge singulière

On considère le raccordement entre deux conduites de diamètres différents. La conduite « amont » a un diamètre $D_1 = 10$ cm, la conduite aval un diamètre $D_2 = 15$ cm. Un écoulement permanent d'eau circule dans la conduite avec un débit de volume $q = 100$ L.s^{-1}. On suppose les écoulements unidimensionnels suffisamment en amont et en aval du raccordement, caractérisés par les vitesse et pressions respectives $(\overrightarrow{v_1} = v_1\overrightarrow{u_x}, P_1)$ et $(\overrightarrow{v_2} = v_2\overrightarrow{u_x}, P_2)$.

1. Justifier quantitativement le fait que les écoulements amont et aval soient unidimensionnels. Relier les vitesses d'écoulement amont v_1 et aval v_2.

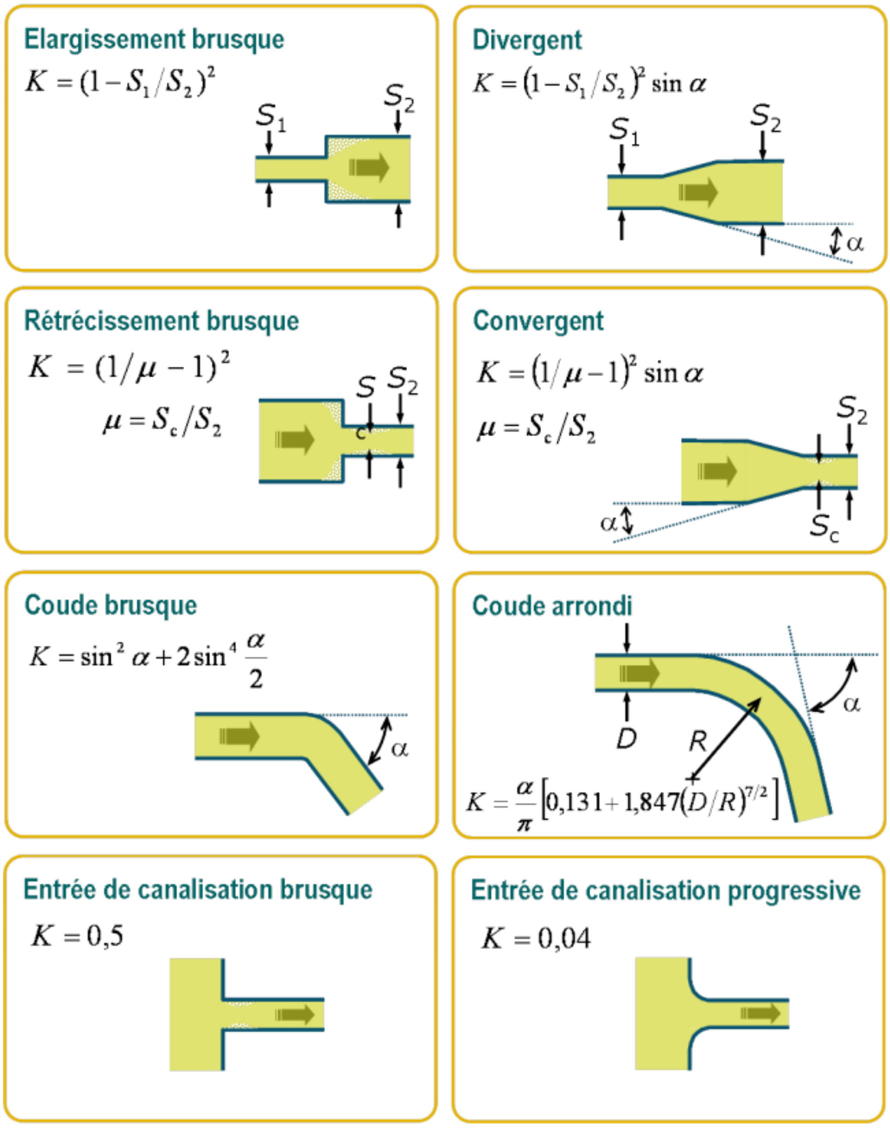
Comme on vient de le montrer, l'écoulement est turbulent. Voici l'allure des lignes de courant moyennes de l'écoulement :



On voit qu'il apparaît une zone de transition (zone d'eau morte ou de stagnation) où l'écoulement est beaucoup plus lent en moyenne, mais où se produit une dissipation d'énergie par viscosité, du fait des inhomogénéités de vitesse qui y existent. Cette zone est responsable de la perte de charge singulière ΔC_{sing}, que l'on cherche à évaluer. On admet que la pression qui règne dans la zone d'eau morte est pratiquement celle qu'on aurait en statique des fluides ; la pression étant continue l'interface, la pression vaut donc P_1 dans cette zone.

2. Par un bilan de quantité de mouvement, déterminer une relation liant S_1, S_2, P_1, P_2, v_1 et v_2.
3. En déduire la perte de charge singulière ΔC_{sing} due à l'élargissement, ainsi que le coefficient $K\left(\frac{S_1}{S_2}\right)$ de perte de charge, défini par : $K = \frac{2\,\Delta C_{sing}}{\rho v_1^2}$. Effectuer l'application numérique.

On donne ci-dessous quelques coefficients de perte de charge singulière dans diverses situations :



4. Commenter les différentes données (on comparera notamment les situations « symétriques »).

Exercice 25 : Coup de bélier dans une conduite

Une conduite d'arrivée d'eau (de masse volumique ρ_0) dans une usine est parcourue initialement par un écoulement permanent supposé unidimensionnel de vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$. Le débit de volume de l'écoulement est $Q = 10$ L.s^{-1}, le diamètre de la conduite est $D = 20$ cm et sa longueur 20 m. A l'instant $t = 0$, on ferme brutalement une vanne, qui se trouve en $x = 0$: on entend alors un bruit sourd, semblable à celui d'un coup de marteau. Nous nous proposons de rendre compte de ce phénomène (appelé « coup de bélier ») et de le quantifier.

On considère le modèle simple suivant : à un instant ultérieur $t > 0$, le liquide est divisé en deux zones, délimitées par une surface de transition d'abscisse $\xi(t) < 0$ (nommée « onde de choc ») se déplaçant à la vitesse $-c\overrightarrow{u_x}$ (c est la célérité de l'onde de choc). On suppose (nous le vérifierons) que $c \gg v_0$. A tout instant $t > 0$:

- A gauche de l'onde choc ($x < \xi(t)$), l'eau s'écoule encore à la vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$, sa masse volumique vaut ρ_0 et la pression vaut P_0 : la perturbation n'a pas encore atteint cette zone.

- A droite de l'onde de choc (mais à gauche de la vanne : $\xi(t) < x < 0$), l'eau est au repos, bloquée par la vanne, la pression vaut P_1 et la masse volumique de l'eau vaut $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ où $0 < \delta\rho \ll \rho_0$. L'eau est donc légèrement compressible.

1. Faire un schéma dans le référentiel de la salle de bains, faisant apparaître l'onde de choc et les différentes vitesses.
2. Dans quel référentiel est-il a priori intéressant de se placer et pourquoi ? Refaire le schéma précédent dans ce référentiel, en dessinant clairement les différents vecteurs vitesses, et en en indiquant la valeur.
3. Effectuer un bilan de masse et relier les grandeurs v_0, ρ_0, c et $\delta\rho$.
4. Effectuer un bilan de quantité de mouvement et trouver un autre relation liant les quatre grandeurs précédentes aux pressions P_0 et P_1.
5. On suppose que l'évolution de l'eau se fait de manière isentropique. Expliciter et justifier cette hypothèse.
6. On donne $\chi_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_S$, coefficient de compressibilité isentropique de l'eau. Montrer que $\delta\rho \approx \rho_0\chi_S(P_1 - P_0)$.
7. En déduire l'expression de c (on rappelle que l'on suppose $c \gg v_0$). Commenter.
8. Calculer numériquement c. Conclure.
9. Calculer numériquement la surpression $P_1 - P_0$ et la variation de masse volumique provoquées par le coup de bélier. Commenter.
10. Evaluer l'énergie et la puissance mises jeu lors du coup de bélier. Conclure.

Donnée : pour l'eau liquide, $\chi_S = 4{,}5.10^{-10}$ Pa^{-1}.

Joints de dilatation endommagés par un coup de bélier

Exercice 26 : Tuyère du moteur Vulcain 2 d'Ariane 5

La tuyère de Laval est un tube en forme de sablier utilisé pour accélérer des gaz chauds et sous pression qui le traversent jusqu'à ce qu'ils atteignent une vitesse supersonique. La tuyère convertit de manière optimale la chaleur des gaz en énergie cinétique. Elle permet de produire de grandes quantités d'énergie à partir de gaz de combustion. Des tuyères de Laval sont utilisées dans les moteurs-fusées, les turbines à vapeur et les turbines à gaz. Dans le cas d'un moteur-fusée ce type de tuyère joue un rôle fondamental dans l'optimisation de la poussée en maximisant la vitesse d'éjection des gaz. La tuyère de Laval doit son nom à l'ingénieur suédois Gustaf de Laval qui en a découvert le principe en 1887.

On considère un écoulement permanent compressible d'un gaz à travers une tuyère de révolution, d'axe (Ox) et de section $S(x)$ variable. On suppose que le profil de la tuyère varie assez doucement avec x de sorte que l'écoulement puisse y être considéré comme quasi-unidimensionnel : $\vec{v} = v(x)\overrightarrow{u_x}$. On note $h(x)$, $\rho(x)$, $P(x)$, et $T(x)$ respectivement l'enthalpie massique, la masse volumique, la pression et la température à l'abscisse x. On affecte l'indice 0 aux grandeurs d'entrée et l'indice 1 aux grandeurs de sortie. L'écoulement est supposé adiabatique réversible.

1. Pouvez-vous justifier l'hypothèse adiabatique ? Quelles hypothèses raisonnables proposez-vous pour étudier l'écoulement ?
2. Montrer que les régions de plus grandes vitesses correspondent aux températures les plus basses.
3. En effectuant un bilan de quantité de mouvement sur un volume de contrôle cylindrique d'axe (Ox), de longueur dx et de petit rayon, montrer que : $\rho \frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{dP}{dx}$.

On introduit la compressibilité isentropique $\chi_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S$ du gaz et on donne l'expression de la vitesse du son c dans le gaz : $c = \frac{1}{\sqrt{\rho \chi_S}}$. On définit enfin le nombre de Mach Ma de l'écoulement : $\mathrm{Ma} = \frac{v}{c}$. On notera au passage que toutes ces grandeurs dépendent de l'abscisse x.

4. Que peut-on dire de la quantité $\rho(x)v(x)S(x)$? Montrer la relation de Hugoniot :
$$\frac{1}{S}\frac{dS}{dx} = -(1-\mathrm{Ma}^2)\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$$
5. Quelle forme faut-il donner à la tuyère pour qu'un écoulement subsonique à l'entrée $(\mathrm{Ma}_0 < 1)$ puisse être supersonique à la sortie $(\mathrm{Ma}_1 > 1)$? A quel endroit la vitesse de l'écoulement atteint-elle précisément la vitesse du son ? Commenter ces résultats.

Pour le moteur Vulcain 2 fonctionnant aux ergols liquides ($O_2(\ell)$ et $H_2(\ell)$) d'Ariane 5, on donne les valeurs suivantes :

- Température des gaz à l'entrée de la tuyère : $T_0 = 5300$ K
- Caractéristiques des gaz éjectés dans la tuyère : $\gamma = 1{,}2$; $M = 18$ g.mol^{-1}
- Pression d'entrée : $P_0 = 115$ bar ; pression de sortie : $P_1 = 1$ bar
- Diamètre de sortie de la tuyère : 2,10 m

6. Calculer la vitesse de sortie v_1 en fonction de v_0 , T_0 , $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$, du rapport $r = \frac{R}{M}$ et du rapport des pressions $\psi = \frac{P_1}{P_0}$. Calculer numériquement la vitesse de sortie v_1 en négligeant v_0, hypothèse que l'on fera dorénavant.
7. Calculer la température de sortie T_1 des gaz éjectés. Que vaut le nombre de Mach Ma_1 en sortie ?

   Donnée : expression de la vitesse du son dans un gaz $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$.

La force de poussée développée par le moteur-fusée vaut : $\|\vec{\pi}\| = D_m v_1$, où D_m est le débit de masse des gaz éjectés.

8. Calculer $\|\vec{\pi}\|$ en fonction notamment du rapport ψ et de la section de sortie S_1 de la tuyère. Effectuer l'application numérique. Commenter le résultat, sachant que la valeur indiquée par le constructeur est de 1350 kN.

Annexes

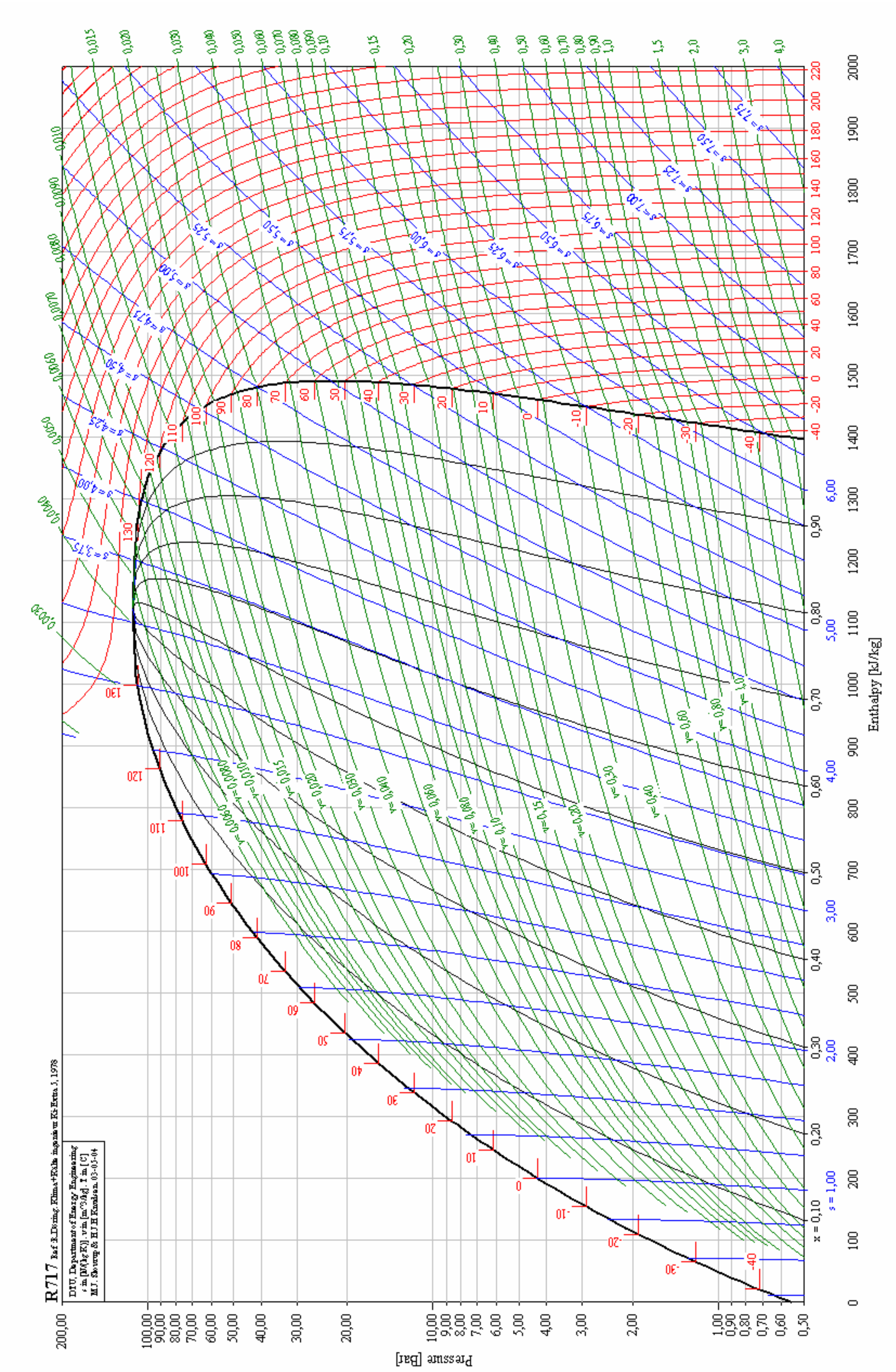


Diagramme (P, h) de l'ammoniac

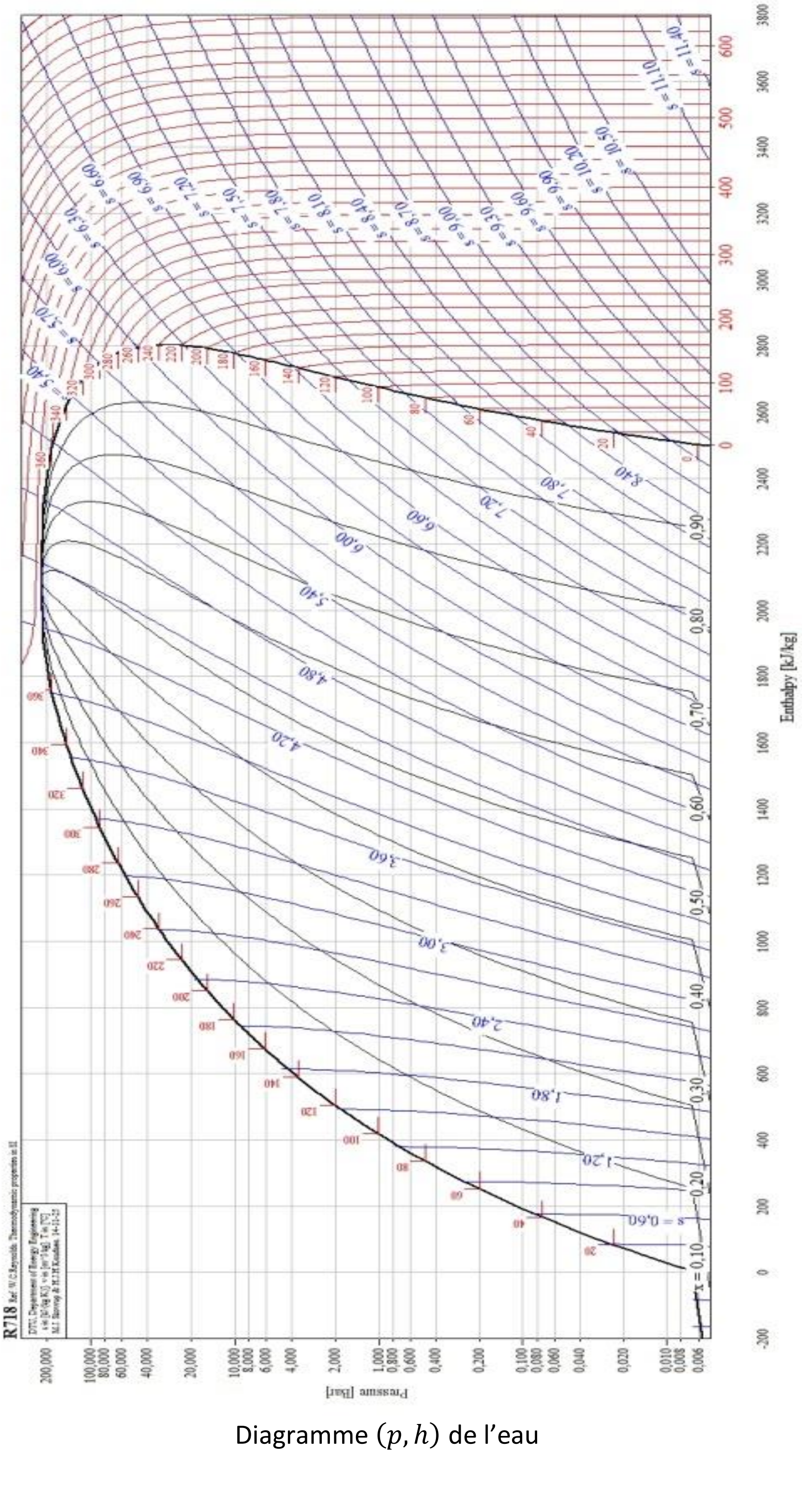


Diagramme (p, h) de l'eau

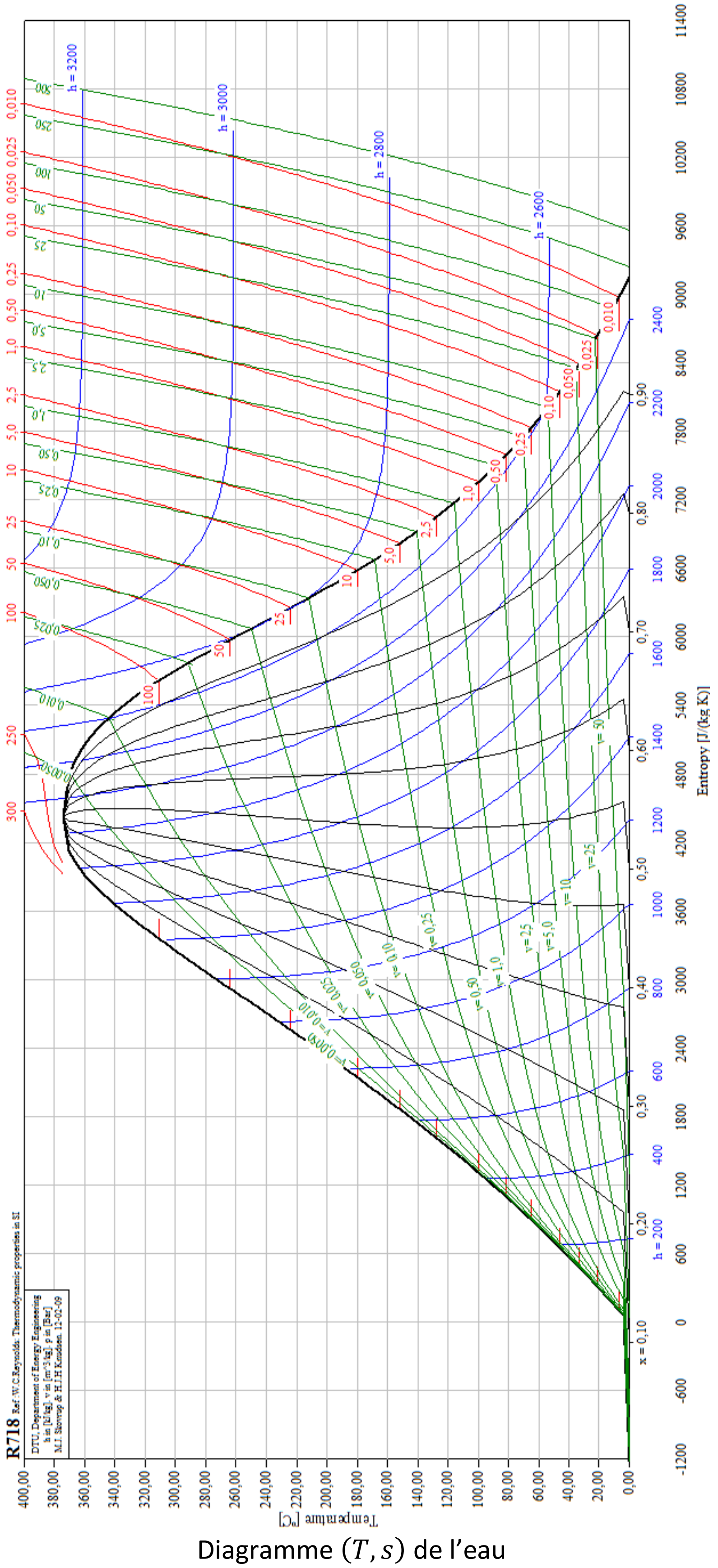


Diagramme (T, s) de l'eau

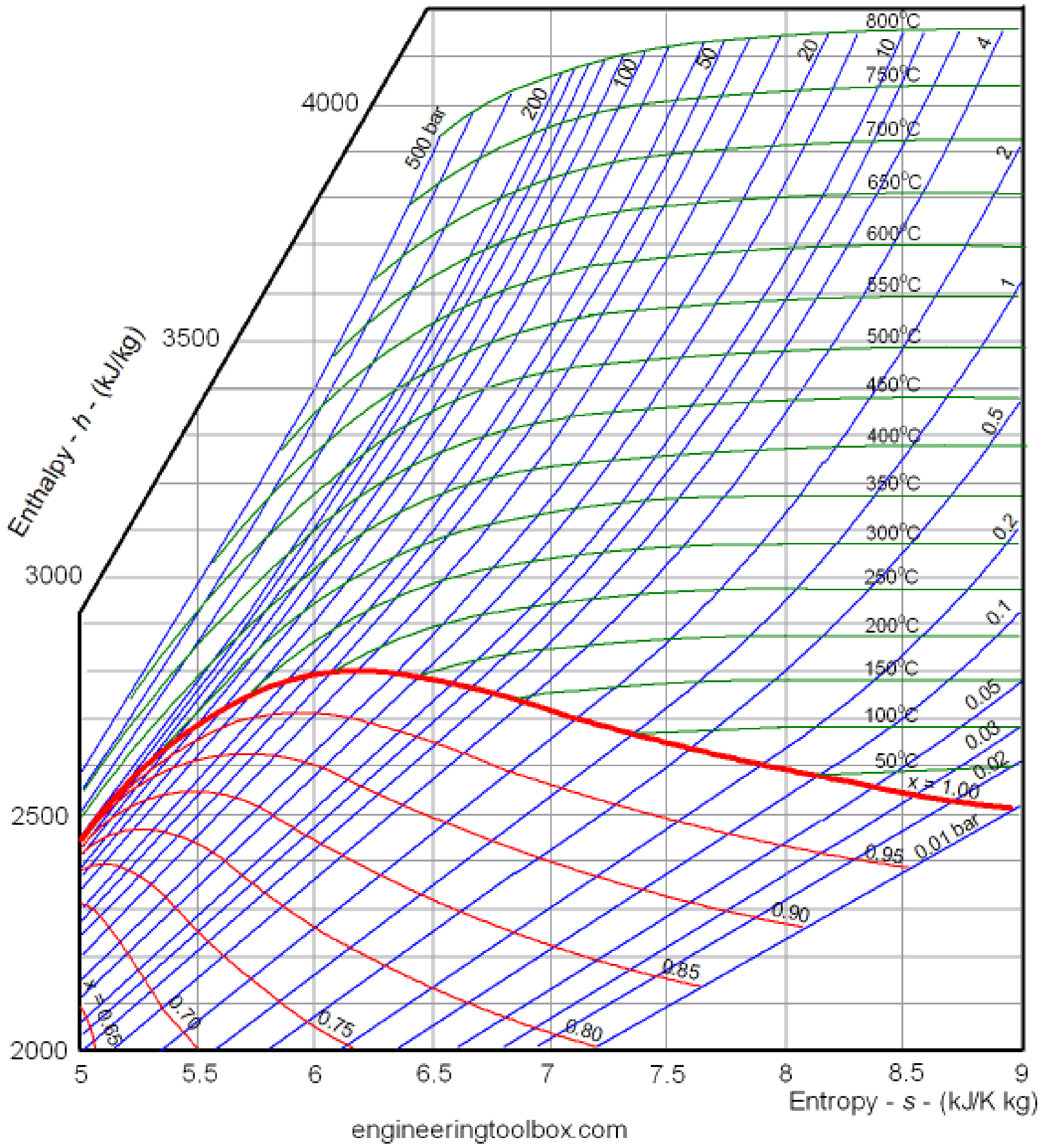


Diagramme de Mollier (h, s) de l'eau

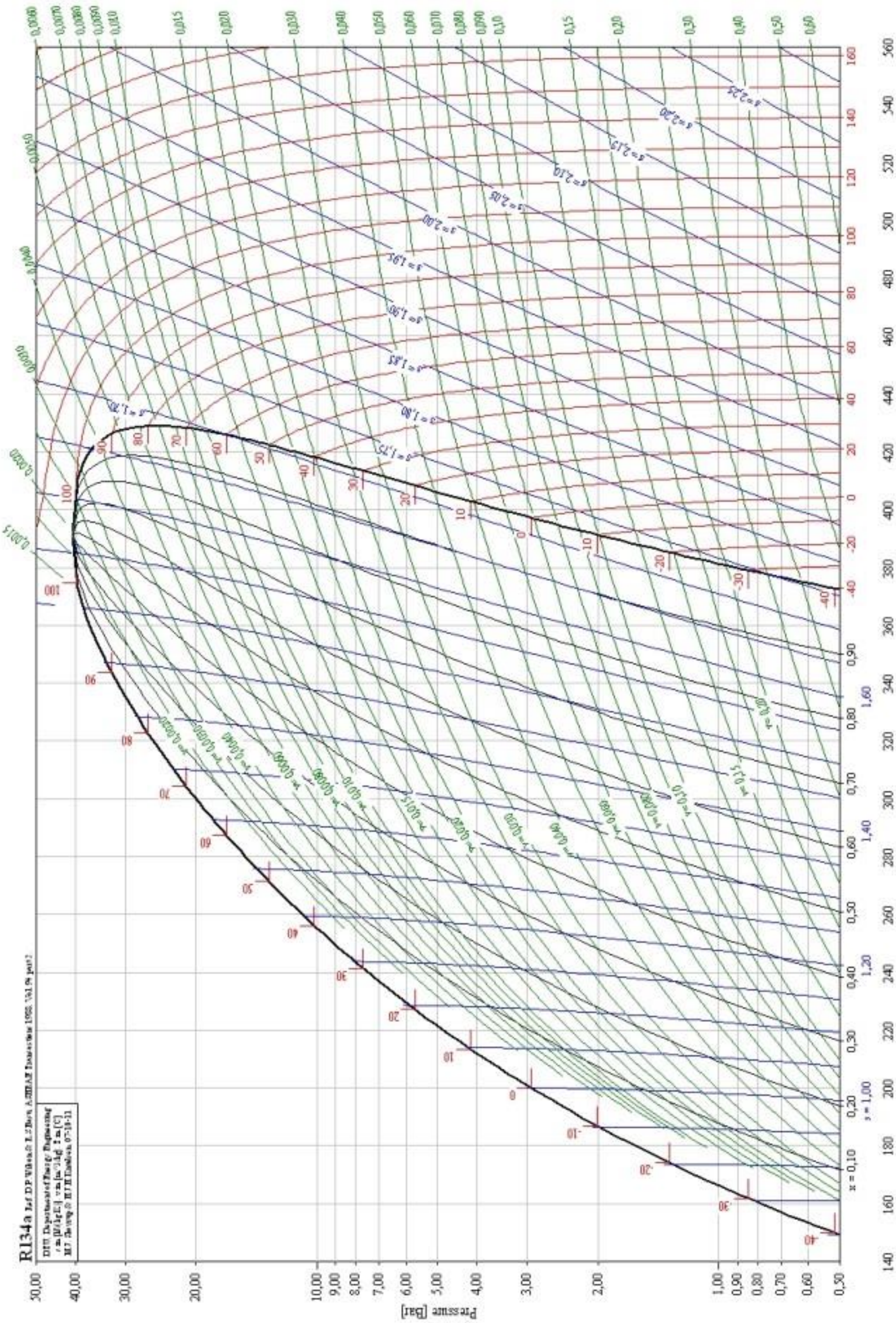


Diagramme (P, h) du frigorigène R134a