Lycée GUSTAVE EIFFEL Bordeaux Aquitaine

PSI*

Mécanique des fluides 1

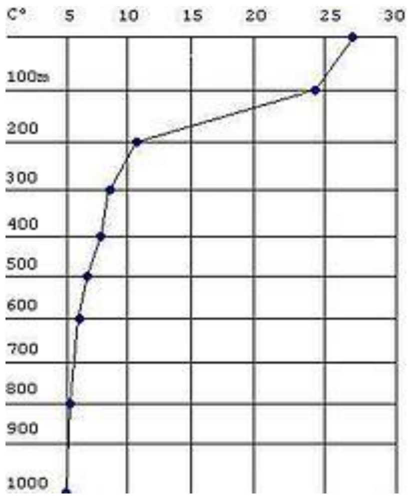
1. Statique des fluides

Exercice 1 : Pression au fond de la fosse des Mariannes

La fosse des Mariannes, découverte en 1875, est l'abysse le plus profond connu. Elle est située dans l'Océan Pacifique et sa profondeur est de l'ordre de 11 km.

1. Proposer une estimation de la pression régnant au fond de la fosse des Mariannes si on suppose l'eau incompressible.

On donne la courbe de température de l'océan en fonction de la profondeur (« thermocline »).



On souhaite tenir compte de la (faible) compressibilité de l'eau liquide. A cette fin, on donne la compressibilité isotherme de l'eau : $\chi_T = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T$ = 4,5.10^{-10} Pa^{-1} et le coefficient de dilatation isobare de l'eau : $\alpha = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_P$ = 1,5.10^{-4} K^{-1}.

2. Pour de l'eau liquide à température constante, exprimer la masse volumique $\mu(P)$ en fonction de la pression autour d'un état de référence $\mu_0(P_0)$.
3. De même, à pression constante, exprimer la masse volumique $\mu(T)$ en fonction de la température autour d'un état de référence $\mu_0(T_0)$. Evaluer la masse volumique de l'eau à une profondeur de 200 m. Qu'en concluez-vous ?
4. Quel modèle raisonnable et simple proposez-vous pour l'océan ? Dans le cadre de ce modèle, réévaluer la pression au fond de la fosse des Mariannes.
5. Comparer au résultat obtenu à la question 1. Conclure.

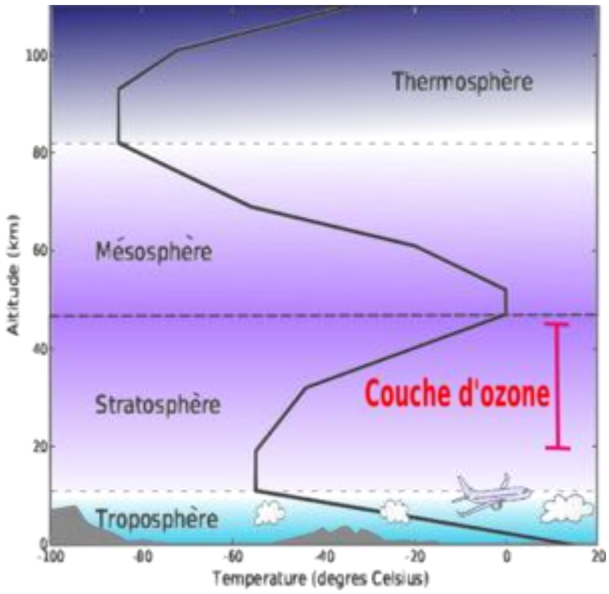
Exercice 2 : Peser l'atmosphère

Evaluer numériquement et avec le minimum de calculs la masse de l'atmosphère terrestre. La comparer à la masse de la Terre.

Données : rayon de la Terre : $R_T = 6400$ km ; masse de la Terre $M_T = 6{,}0.10^{24}$ kg.

Exercice 3 : Pression atmosphérique et aviation commerciale

On cherche dans cet exercice à proposer un modèle de la pression statique dans la partie de l'atmosphère utilisable pour l'aviation, et à évaluer l'épaisseur de cette zone. A cette fin, on donne l'évolution de la température de l'atmosphère en fonction de l'altitude :



1. Proposer un modèle pour l'évolution de la température $T(z)$ avec l'altitude dans la zone concernée par l'aviation commerciale.
2. Déterminer la loi régissant la pression $P(z)$ en fonction de l'altitude.
3. Comparer quantitativement les résultats de ce modèle et de celui de l'atmosphère isotherme. Conclure.

Exercice 4 : Apéro !

Il fait 35 °C et c'est l'heure de l'apéro. On considère un verre rempli à ras bord d'une boisson assimilée à de l'eau (?) dans laquelle on a mis des glaçons.

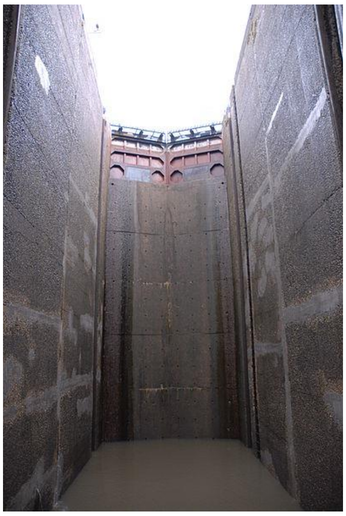
1. Notre héros, pas pressé de se désaltérer, soulève un glaçon et le relâche sans vitesse initiale. Décrire ce qui se produit, qualitativement et quantitativement.
2. Le verre risque-t-il de déborder lorsque tous les glaçons auront fondu ? Que dire des conséquences de la fonte de la banquise due au réchauffement climatique ?

Exercice 5 : Dans le bus

Un élève de PSI* emmène son petit frère à la foire aux plaisirs sur la place des Quinconces. Celui-ci y gagne un superbe ballon gonflé à l'hélium à l'effigie du dernier film d'animation à la mode. Au retour, ils décident de prendre le bus pour rentrer chez eux. Le petit frère tient fermement la main de son grand frère dans une main et le ballon gonflé à l'hélium dans l'autre. Ils constatent alors un phénomène surprenant : lorsque le bus prend un virage à droite, le ballon s'incline à droite et lorsque le bus freine, le ballon s'incline vers l'arrière. Le grand frère, qui a quelques connaissances en physique, est quelque peu décontenancé par ce comportement bizarre. Il décide alors de s'en ouvrir à son cher professeur de physique lors du prochain cours.

Merci d'aider ledit professeur de physique à interpréter ces phénomènes, qualitativement et quantitativement !

Exercice 6 : Porte d'une écluse



La photo ci-contre montre la porte de l'écluse de Réchicourt – le – Château, située sur le Canal de la Marne au Rhin, dans le département de la Moselle. Cette écluse géante, mise en service en 1964, remplace six écluses traditionnelles et permet le passage des bateaux en 30 minutes au lieu de 6 heures. Elle permet un dénivelé de 15,30 m.

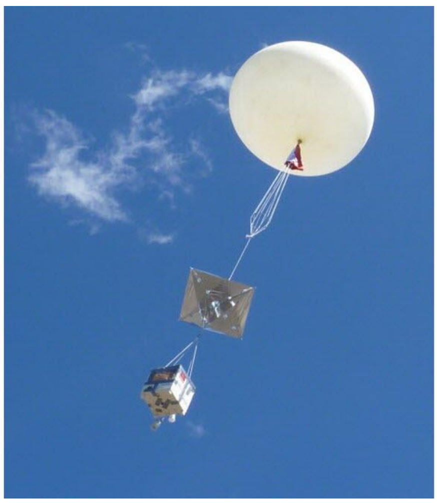
Evaluer la force subie par la porte ce l'écluse.

Exercice 7 : Ballon – sonde

Le ballon-sonde est le moyen le plus simple et le plus économique d'envoyer une charge dans les différentes couches de l'atmosphère. Les ballons météorologiques, embarquant du matériel scientifique de mesure, explorent par exemple toute la troposphère et la basse stratosphère. On se propose ici d'étudier un ballon stratosphérique à l'hélium ouvert. On adopte ici le modèle de l'atmosphère isotherme, de température $T_0 = 273$ K ; le champ de pression est donc de la forme : $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$ où $P_0 = 1$ bar, z désigne l'altitude et H est une altitude caractéristique du modèle de l'atmosphère isotherme.

On considère le ballon-sonde, représenté sur la figure ci-contre, composé :

- d'une enveloppe supposée sphérique, de volume $V = 100$ m^3 (correspondant à un diamètre de l'ordre de 6 m, ouverte sur l'extérieur par des manches d'évacuation situées à la base du ballon ;
- d'un parachute permettant de ralentir la descente du ballon à la fin de la mission ;
- d'un réflecteur radar rendant plus facile le suivi à distance du ballon ;
- d'une nacelle, contenant les appareils de mesure, le système de télécommunication et de positionnement GPS.



Dans ce type de ballon, l'enveloppe est indéformable et garde un volume constant. Le ballon étant ouvert à sa base, la pression à l'intérieur du ballon est identique à tout moment à celle qui règne à l'extérieur. Au moment du lancement, le ballon est gonflé à l'hélium. On suppose que la température à l'intérieur du ballon reste constante, égale à la température extérieure. La masse m de l'ensemble {enveloppe + parachute + réflecteur + nacelle} reste constante au cours du vol. Le volume du ballon est assimilé à celui de son enveloppe.

1. Déterminer la masse de gaz contenue dans l'enveloppe au décollage.
2. Effectuer un bilan des forces précis s'exerçant sur le ballon au moment du décollage. En déduire une condition sur m pour que le ballon décolle effectivement.

On considère dans la suite $m = 10$ kg.

3. Expliquer ce qui se passe dans le ballon au cours de son ascension.
4. Le plafond est atteint lorsque le ballon est à son altitude maximale. À quelle condition le ballon plafonne-t-il ? Estimer alors l'altitude maximale atteinte par le ballon-sonde.

Dès que le plafond est atteint, un système de largage libère le ballon de son enveloppe. Le ballon entame alors sa descente, ralentie par le parachute. Une fois retrouvés au sol, les appareils de mesure pourront servir une nouvelle fois pour une prochaine mission.

Exercice 8 : Ejection d'un bouchon de champagne

Lors de l'ouverture d'une bouteille de champagne, le bouchon peut s'avérer un projectile dangereux en raison de la forte pression qui règne à l'intérieur de la bouteille (celle-ci avoisine les 6 bar à 20 °C).

Estimer la vitesse déjection du bouchon ainsi que la hauteur que peut atteindre celui-ci.

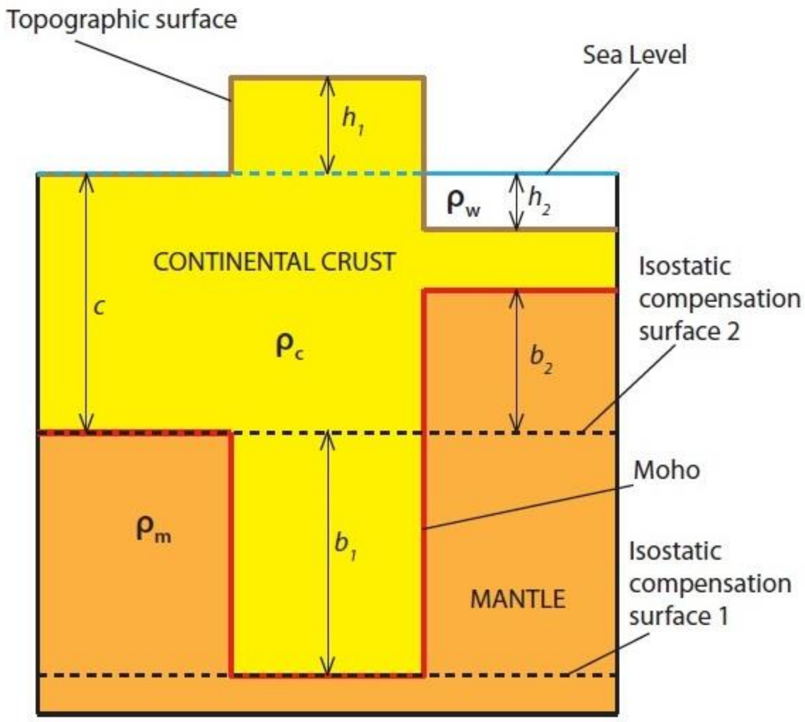
Exercice 9 : Hémisphères de Magdebourg

Otto Von Guericke, bourgmestre de Magdebourg, avait joint deux hémisphères métalliques de 28 cm de rayon et réalisé le vide à l'intérieur du dispositif à l'aide d'une pompe à vide de son invention. Lors de la première expérience qu'il mena le 6 mai 1654 devant l'Empereur Ferdinand II à Ratisbonne, deux attelages de 15 chevaux ne purent pas séparer les deux hémisphères tant que le vide fut maintenu.

Quelle force aurait-il fallu exercer de chaque côté pour séparer les hémisphères ?

Exercice 10 : Ajustement isostatique dans le modèle d'Airy – Heiskanen

Selon Airy (GB, $\sim$ 1830) et Heiskanen (Finlande, 1924), la croûte continentale solide (ou lithosphère) « flotte » sur le manteau terrestre fluide (ou asthénosphère). Lors de modifications locales de la topographie de la surface terrestre (émergence d'une chaîne de montagne, apparition d'un bassin ou d'une fosse océanique, fonte des glaces aux pôles…), la croûte se déforme à la verticale de la modification en surface, et elle s'enfonce dans le manteau ou au contraire remonte vers la surface terrestre, ainsi que l'indique schématiquement la figure ci-dessous. Ce phénomène est nommé par les géologues « ajustement isostatique », et on propose d'en étudier le modèle le plus simple, dû à Airy et Heiskanen. On suppose dans ce modèle que les différentes « tranches » verticales sont indépendantes entre elles. La surface séparant le manteau de la croûte est nommée « moho » par les géologues.



h_1 = elevation of mountain belt (above sea level)
h_2 = depth of marine basin (below sea level)
b_1 = thickness of crustal roots (below depth of Moho in a cratonic area)
b_2 = thickness of lithosphere mantle bulge (above depth of Moho in a cratonic area)
c = thickness of continental crust in an undeformed (cratonic) area (ca. 35 km)

ρ_w = density of sea water (ca. 1,000 Kg/m^3)
ρ_c = density of continental crust (ca. 2,800 Kg/m^3)
ρ_m = density of mantle (ca. 3,300 Kg/m^3)

2. Dans le cas de la formation d'une chaîne de montagnes de hauteur moyenne h_1, évaluer l'accroissement b_1 de l'épaisseur de la croûte terrestre en fonction de h_1, ρ_c et ρ_m, masses volumiques respectives de la croûte et du manteau. Calculer numériquement b_1 dans le cas de l'Himalaya (programme de géographie de CM2).
3. Adapter les calculs et résultats précédents pour déterminer la diminution b_2 de l'épaisseur de la croûte terrestre consécutive à la formation d'un bassin océanique de profondeur h_2 (résultat : $b_2 = \frac{\rho_c - \rho_w}{\rho_m - \rho_c} h_2$). Calculer numériquement b_2 dans le cas d'une plaine abyssale de profondeur 5 km.

2. Débits et lois de conservation

Exercice 11 : Calculs de débits

1. Une langue de lave horizontale d'épaisseur e et de largeur L, de masse volumique μ, s'écoule avec le champ de vitesse $\vec{v} = v_0 \frac{z}{e} \overrightarrow{u_x}$ (le sol est à l'altitude $z = 0$). Calculer le débit de masse de cet écoulement.
2. Une masse d'air atmosphérique dont la masse volumique à l'altitude z est donnée par $\mu(z) = \mu_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$ s'écoule parallèlement au sol avec un champ de vitesse uniforme $\vec{v} = v_0 \overrightarrow{u_x}$. Calculer le débit de masse de l'air par unité de largeur de l'écoulement.
3. Un liquide visqueux de masse volumique μ s'écoule dans un tuyau cylindrique d'axe (Ox) et de rayon R avec le champ de vitesse $\vec{v} = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \overrightarrow{u_x}$ en coordonnées cylindriques d'axe (Ox). Calculer le débit de masse dans le tuyau.
4. Un brumisateur émet en régime permanent des particules de fluide de façon sphérique et isotrope à partir d'un point O, avec un débit de masse D_m.Le champ des vitesses en coordonnées sphériques est donné par : $\vec{v}(r) = v_0 \overrightarrow{u_r}$. Déterminer la masse volumique $\mu(r)$.

Exercice 12 : Système circulatoire sanguin

A la sortie du cœur, le sang est évacué par l'aorte qui peut être considérée comme une conduite cylindrique de rayon $a_1 = 1$ cm. Le débit de volume de sang vaut $D_v = 6$L.min^{-1}. La viscosité du sang vaut $\eta = 4.10^{-3}$ Pa.s et sa masse volumique sera assimilée à celle de l'eau liquide.

1. Quelle est la vitesse du sang dans l'aorte ? On supposera, en justifiant quantitativement cette hypothèse, que le champ des vitesses est uniforme sur une section droite de l'écoulement.

L'aorte se divise ensuite en N_2 artères de rayon a_2, puis en N_3 artérioles de rayon $a_3 = 20$ µm. Le débit de volume du sang dans une artère vaut $D_{v,2} = 2$ mL.s^{-1}.

2. Combien y a-t-il d'artères ? Combien y a-t-il d'artériolles sachant que la vitesse débitante du sang y est de $v_3 = 5$ mm.s^{-1} ?
3. L'écoulement du sang est-il laminaire dans une artériolle ?

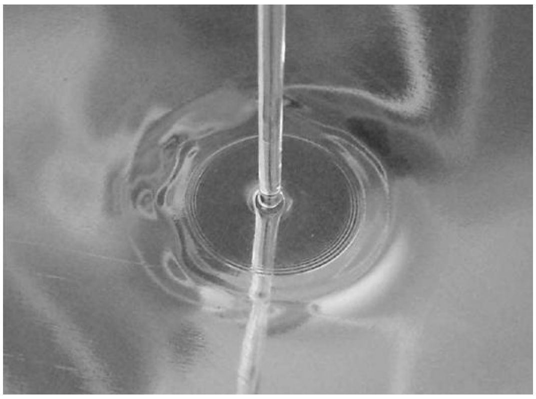
Exercice 13 : Coulée d'huile

Un bidon d'huile est muni d'un robinet sur sa face inférieure, dont l'extrémité est circulaire de rayon R et de centre O. On définit l'axe (Oz) dirigé vers le bas. La masse volumique de l'huile est notée μ et le débit de masse sortant du robinet D. A la cote z, la vitesse du fluide $v(z)\overrightarrow{u_z}$ est supposée uniforme dans la section droite de l'écoulement. On pose $v(z = 0) = v_0$. On suppose que la vitesse $v(z)$ est celle qu'aurait acquise une bille en chute libre sans frottement dans le champ de pesanteur, lâchée en $z = 0$ avec une vitesse initiale v_0.

1. Exprimer v_0 en fonction notamment de D.
2. Exprimer $v(z)$ en fonction notamment de z.
3. Déterminer le rayon $r(z)$ du filet d'huile à la cote z en supposant v_0 négligeable (on fera dorénavant cette hypothèse).
4. Le sol est situé à une distance H sous le robinet. On ferme le robinet à un instant donné. Quelle est la masse d'huile qui va se répandre sur le sol à partir de cet instant ?
5. Ecrire l'équation de continuité avant la fermeture du robinet. Qu'en pensez-vous ? L'huile serait-elle en écoulement compressible ?

Exercice 14 : Ressaut hydraulique

Lorsqu'on ouvre le robinet d'une burette au-dessus d'une surface plane, on observe autour du point d'impact du jet une zone annulaire mince délimitée par deux cercles de rayons a et b ($a < b$) ; puis au-delà du cercle de rayon b, un bourrelet circulaire plus épais (c'est le ressaut) qui est le siège d'irrégularités marquées de l'écoulement.



On note D le débit de masse de l'eau sortant de la burette et μ la masse volumique de l'eau. A la distance r de l'axe, $a \leq r \leq b$, on note $h(r)$ la hauteur d'eau et $\vec{v}(r) = v(r)\overrightarrow{u_r}$ la vitesse du fluide, supposée quasi-radiale.

1. Quelle est la relation liant $h(r)$ et $v(r)$?

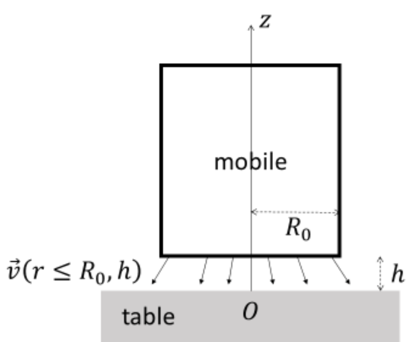
Le ressaut se forme quand la condition suivante est remplie : $\frac{\mu v(r)h(r)}{\eta} \approx 50$.

2. Interpréter cette condition. Calculer le rayon b du ressaut pour un débit $D = 50$ g.s^{-1}. On donne la viscosité dynamique de l'eau liquide : $\eta = 1{,}0.10^{-3}$ Pa.s.

Exercice 15 : Mobile à coussin d'air

Un mobile à coussin, assimilé à un cylindre d'axe (Oz) orienté vers le haut et de rayon R_0, aspire l'air par le haut et l'éjecte à sa base avec une vitesse $\vec{v}(r \leq R_0, h) = v_r(r)\overrightarrow{u_r} - v_0\overrightarrow{u_z}$ (en coordonnées cylindriques d'axe (Oz)). Le mobile flotte à une hauteur h au-dessus d'une table horizontale (confondue avec le plan $z = 0$). On étudie l'écoulement de l'air, supposé incompressible sous le palet. On cherche le champ des vitesses sous la forme : $\vec{v}(r,z) = v_r(r)\overrightarrow{u_r} + v_z(r,z)\overrightarrow{u_z}$.

On donne : $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ en coordonnées cylindriques.



1. En faisant un bilan de matière sur un cylindre d'axe (Oz), de hauteur h et de rayon $r \leq R_0$, situé sous le palet, déterminer $v_r(r)$.
2. En déduire $v_z(r, z)$. Examiner les conditions aux limites de l'écoulement.
3. Trouver l'équation des lignes de courant et en représenter quelques-unes. Représenter l'allure de la carte du champ des vitesses.
4. En déduire le rayon $R(z)$ du tube de courant émis par le mobile en fonction de R_0, h et z. Faire un schéma.

Exercice 16 : Quelle stratégie adopter sous la pluie ?

Un homme imprévoyant, qui n'a ni parapluie ni vêtements imperméables, doit parcourir la distance d dans la direction horizontale $\overrightarrow{u_x}$. On l'assimile à un parallélépipède rectangle de dimensions $h \times L \times \ell$

où h est sa hauteur, L sa largeur d'épaules et ℓ son épaisseur (du dos au ventre). Naturellement, ce qui devait arriver arrive : l'homme se retrouve sous un abat d'eau ! La pluie, assimilée à un fluide continu de masse volumique μ, tombe verticalement à la vitesse $-U\overrightarrow{u_z}$ ($U > 0$) par rapport au sol.

1. En supposant qu'il se déplace à vitesse constante $v\overrightarrow{u_x}$ ($v > 0$), quelle est la masse d'eau reçue par l'homme au cours de son trajet ? Doit-il marcher ou courir ? A quelle vitesse ? Interpréter.
2. Le vent se lève. De ce fait, la pluie possède une composante supplémentaire de vitesse $V > 0$ selon $\overrightarrow{u_x}$. Répondre aux mêmes questions.

Exercice 17 : Sur la rocade bordelaise

Nous sommes un vendredi soir sur la rocade bordelaise, et naturellement, il y a des bouchons. Sur une portion de cette rocade à 3 voies : la circulation est fluide, les véhicules se répartissent sur les 3 voies, se suivent sagement sur chaque voie à 200 m d'écart, et roulent non moins sagement à 90 km/h. Un bouchon se forme subitement au point kilométrique D. Dans le bouchon, les véhicules sont à l'arrêt et espacés de 10 m en moyenne.

Déterminer à quelle vitesse se propage l'arrière du bouchon (c'est-à-dire la vitesse à laquelle un véhicule de sécurité signalant le bouchon doit reculer sur la bande d'arrêt d'urgence pour rester constamment à la hauteur des derniers véhicules arrêtés).

3. Viscosité

Exercice 18 : Lubrification

Un fluide newtonien sépare deux plaques horizontales parallèles très longues de surface S, sur une épaisseur e. La plaque inférieure est immobile tandis que la plaque supérieure est entraînée en translation à la vitesse constante $v_0\overrightarrow{u_x}$.

1. Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par l'écoulement ? Proposer la forme la plus simple de champ de vitesse compatible avec ces conditions aux limites.
2. Quelle est la composante horizontale de la force subie par la plaque supérieure de la part du fluide ?

Un bloc métallique parallélépipédique, de surface carrée de côté $a = 10$ cm et de masse $m = 1$ kg, est posé sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale. Le plan incliné est lubrifié, c'est-à-dire enduit d'une huile de viscosité dynamique η. Le bloc est lâché sans vitesse initiale. On suppose que l'écoulement de l'huile entre le bloc et le plan peut être modélisé de la même manière que précédemment, avec une épaisseur $e = 1$ mm d'huile. Après un certain temps, le bloc atteint une vitesse limite $v_{lim} = 0,4$ m.s^{-1}.

3. Calculer numériquement la viscosité η de l'huile.
4. Quelle est la durée du régime transitoire ?

Exercice 19 : C'est l'heure du goûter !

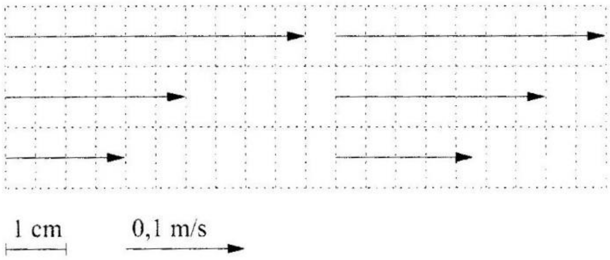
C'est l'heure du goûter. Gabriel, toujours aussi curieux, regarde avec étonnement et gourmandise la tartine que sa maman lui a généreusement enduite de miel. Il incline la tartine d'un angle $\alpha \approx 60°$ et observe ce qui se passe : le miel se met à s'écouler…

On assimile le miel à liquide newtonien de viscosité $\eta \approx 10$ Pa.s et de densité $d \approx 1,4$.Le miel a été étalé sur une épaisseur $e \approx 5$ mm la profondeur du canal et la largeur de la tartine vaut $L \approx 10$ cm.

1. Proposer des hypothèses raisonnables quant à l'écoulement et à la forme du champ de vitesse.
2. Quelles conditions aux limites de l'écoulement proposez-vous pour l'écoulement ? On donne la viscosité de l'air : $\eta_{air} \approx 10$ µPa.s.
3. Ecrire la loi de la quantité de mouvement appliquée à une particule de fluide bien choisie.
4. Déterminer complètement le champ des vitesses et le champ de pression en tout point de l'écoulement.
5. Représenter le profil des vitesses.
6. Calculer le débit volumique Q et la vitesse débitante.
7. Vérifier la validité du modèle mis en œuvre.

Exercice 20 : Mesure de viscosité par lecture d'une carte de vitesses

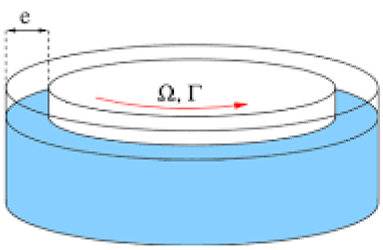
Voici la carte partielle du champ des vitesses d'un écoulement stationnaire incompressible d'un fluide newtonien de masse volumique $\mu = 1500$ kg.m^{-3}. La pression est uniforme dans tout le fluide et on néglige le poids.



Donner une estimation numérique de la viscosité η du fluide.

Exercice 21 : Viscosimètre de Couette

Un liquide newtonien de viscosité η et de masse volumique μ occupe le volume compris entre deux cylindres coaxiaux d'axe (Oz) et de rayons respectifs $R_1 = R$ et $R_2 = R + e$ et de hauteur h. Le cylindre intérieur est entraîné en rotation à la vitesse angulaire Ω maintenue constante par un couple moteur Γ que l'on mesure. Le cylindre extérieur est fixe. Nous allons montrer que la mesure du couple Γ permet de mesurer la viscosité η du liquide.



En régime stationnaire, on cherche le champ des vitesses du fluide sous la forme $\vec{v} = v(r)\overrightarrow{u_\theta}$ en coordonnées cylindriques d'axe (Oz). La contrainte visqueuse de cisaillement s'écrit dans cette géométrie : $\frac{\overrightarrow{dF_{visc}}}{dS} = \eta r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\overrightarrow{u_\theta}$.

1. Commenter l'expression de la contrainte visqueuse.
2. Exprimer le moment projeté sur l'axe (Oz) dû aux forces de viscosité que subit un cylindre de liquide de rayon r et de hauteur h, de la part du fluide qui lui est extérieur.
3. En déduire que le moment résultant des forces de viscosité subi par la portion de fluide comprise entre les cylindres de rayons r et $r + dr$ est donné par :
$$d\mathcal{M}_z = 2\pi\eta h \frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\right) dr$$
4. En déduire que le champ des vitesses est de la forme $v(r) = \frac{A}{r} + Br$ et déterminer les constantes d'intégration A et B.
5. En déduire que si $e \ll R$, la viscosité du liquide est liée au couple moteur par la relation :
$$\eta = \frac{e}{2\pi h R^3 \Omega}\Gamma$$

6. On effectue cette expérience sur de l'huile d'olive de masse volumique $\mu = 920$ g.L^{-1} et les données géométriques sont les suivantes : $R = 50$ mm ; $h = 100$ mm ; $e = 2{,}0$ mm. Pour une vitesse de rotation imposée de 1,0 tour.s^{-1}, on mesure $\Gamma = 19{,}7$ mN.m. Que vaut la viscosité η de l'huile d'olive ?
7. Quelle est l'ordre de grandeur de la vitesse angulaire maximale Ω_{max} au-delà de laquelle la mesure n'a plus de sens ?

Exercice 22 : Amortisseur d'automobile

Un amortisseur d'automobile est constitué de deux cylindres coaxiaux d'axe (Oz) et de rayons a et b ($a < b$). Le cylindre extérieur est fixe et le cylindre intérieur, qui est plein, peut « coulisser » le long de l'axe (Oz). L'espace entre les deux cylindres est rempli d'un fluide visqueux de viscosité η.

La vitesse du cylindre intérieur est supposée égale à $-V_0\overrightarrow{u_z}$. L'écoulement provoqué par le mouvement dudit cylindre est supposé permanent et incompressible, et le champ des vitesses est de la forme

$\vec{v} = v(r)\overrightarrow{u_z}$. On suppose de plus que la répartition de pression est purement hydrostatique (c'est-à-dire qu'elle la même qu'en statique des fluides). On donne enfin l'expression de la contrainte de cisaillement dans cette géométrie et en coordonnées cylindriques : $\frac{\overrightarrow{dF_{visc}}}{dS} = \eta\frac{\partial v}{\partial r}\overrightarrow{u_z}$.

1. Pourquoi $\vec{v}$ ne dépend-elle pas de z ?
2. Dessiner le volume de fluide compris entre les cotes z et $z + dz$ et les rayons r et $r + dr$. Montrer que la résultante des forces de viscosité qu'il subit est donnée par :

$$\overrightarrow{dF_{visc}} = 2\pi\eta\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)dr\,dz\,\overrightarrow{u_z}$$

3. Ecrire la loi de la quantité de mouvement appliquée à cette particule de fluide et déterminer complètement le champ de vitesse en fonction de r, a , b et V_0. Représenter le profil des vitesses.
4. Calculer la force de frottement $\vec{F}_{amort}$ subie par le cylindre intérieur dont la longueur vaut L. Commenter.

L'automobile roule à vitesse constante c sur une route bosselée présentant des bosses de hauteur $z_0 = 10$ cm distantes de $\lambda = 1$ m. Le fluide utilisé est une huile de viscosité $\eta = 1$ Pa.s et de masse volumique $\mu = 10^3$ kg.m^{-3}. On donne : $a = 2{,}9$ cm ; $b = 3{,}0$ cm ; $L = 20$ cm.

5. Calculer numériquement V_0 et $\|\vec{F}_{amort}\|$ dans les deux cas : $c = 50$ km/h et $c = 90$ km/h.
6. Comment définiriez-vous le nombre de Reynolds associé à l'écoulement ? Le calculer numériquement dans les deux cas envisagés. Qu'en dites-vous ?