Lycée GUSTAVE EIFFEL Bordeaux Aquitaine

PSI*

Transport par diffusion - conduction

1. Conduction électrique

Exercice 1 : Vitesses électroniques dans un conducteur

Le cuivre a pour masse molaire $M = 63{,}55$ g.mol^{-1} et pour masse volumique $\mu = 8960$ kg.m^{-3}. Chaque atome de cuivre libère un électron de conduction.

1. Calculer le nombre n d'électrons de conduction par unité de volume.
2. Calculer la vitesse moyenne de ces électrons dans un fil de cuivre de section $s = 1$ mm^2 parcouru par un courant $I = 10$ A.
3. A l'aide des données ci-dessous, proposer une expression et évaluer un ordre de grandeur de la vitesse quadratique moyenne v_{th} des électrons à la température T (module moyen de la vitesse traduisant l'agitation thermique). Commenter.

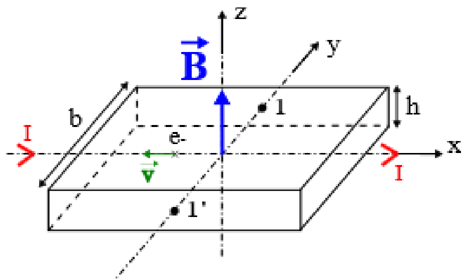
Données : masse de l'électron $m = 0{,}9.10^{-30}$ kg ; constante de Boltzmann $k_B = 1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1}.

Exercice 2 : Effet Hall

On considère un conducteur plongé dans un champ électrique $\vec{E}$ et dans un champ magnétique $\vec{B}$. Les électrons de conduction (de densité volumique n) sont caractérisés par un temps de relaxation τ dans le modèle de frottement visqueux de Drude.

1. Montrer qu'en régime permanent, le champ électrique $\vec{E}$ s'écrit :
$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\vec{j} + \overrightarrow{E_H}.$$
$\overrightarrow{E_H}$ est nommé champ de Hall et est de la forme : $\overrightarrow{E_H} = R_H\vec{B} \times \vec{j}$. On donnera l'expression de la constante de Hall R_H.
2. L'aluminium cristallise dans un réseau cubique à faces centrées de paramètre de maille $a = 405$ pm. On mesure $R_H = -1{,}10.10^{-10}$ SI et $\sigma = 2{,}63.10^{10}$ Ω.m. Calculer le rapport du nombre volumique d'électrons de conduction au nombre volumique d'atomes d'aluminium. Commenter. Calculer le temps de relaxation τ.

Pour mesurer la constante de Hall, on envisage le montage suivant (sonde à effet Hall) :



3. Au cours d'un très bref régime transitoire, des électrons s'accumulent sur l'une des deux faces (1) ou (1') : identifier la face qui se charge négativement et la face qui se charge positivement.
4. A l'issue de ce régime transitoire, on atteint un régime permanent : la force magnétique de Lorentz est exactement compensée par la force électrique $-e\overrightarrow{E_H}$ et les électrons poursuivent leur trajet en ligne droite, transportant le courant I. Exprimer le champ $\overrightarrow{E_H}$ en fonction de la vitesse v des électrons et du champ magnétique B.
5. En déduire qu'il apparaît entre les faces (1) et (1') une tension, dite de Hall :
$$U_H = V_{1'} - V_1 = R_H \frac{BI}{h}$$
6. Comment serait modifié le résultat précédent dans le cas de porteurs de charges positifs (trous dans un semi-conducteur) ?

Exercice 3 : Modèle de Drude collisionnel

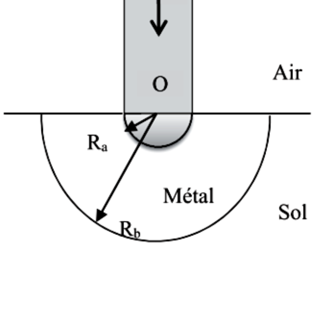
Compte tenu des ordres de grandeur calculés à l'exercice 1, on adopte un modèle de marche au hasard pour les électrons de conduction, dans laquelle l'agitation domine largement la migration. On considère un électron de conduction « moyen » qui subit une collision à des instants séparés d'un intervalle de temps τ moyen avec les défauts du réseau cristallin. Entre deux collisions successives, l'électron est soumis à la seule force due au champ électrique $\vec{E}$ appliqué, supposé uniforme et stationnaire. A chaque collision, la vitesse est redistribuée aléatoirement et de manière totalement isotrope : toutes les directions sont équiprobables.

On note $\overrightarrow{v_0}$ la vitesse initiale de l'électron moyen juste après une collision survenue à un instant pris comme origine des temps.

1. Exprimer la vitesse $\vec{v}(0 \leq t < \tau)$ de l'électron avant la prochaine collision.
2. En déduire la vitesse moyenne de migration des électrons (ou vitesse de dérive) $\langle\vec{v}\rangle$.
3. Commenter la relation liant $\langle\vec{v}\rangle$ au champ électrique appliqué $\vec{E}$. Comparer le modèle adopté ici à celui du cours.
4. Que vaut la conductivité du métal ? Commenter.

Exercice 4 : Prise de terre d'un paratonnerre

Un paratonnerre sert à collecter et dévier vers la terre le courant électrique mis en jeu lors d'un épisode de foudre et ainsi protéger les bâtiments et les personnes. Son extrémité se termine sous la terre, elle est constituée d'une coque hémisphérique métallique de centre O, de rayon intérieur R_a, et de rayon extérieur R_b.
On note $\gamma_{métal}$, la conductivité électrique du métal qui la constitue. Cette prise est enfoncée dans le sol, assimilé au demi espace $z < 0$ et de conductivité électrique γ_{sol} .



Le courant $I = 50$ kA provenant d'un paratonnerre est supposé indépendant du temps et orienté vers le bas. Dans la partie $z < 0$, le courant est radial, de densité $\vec{j} = j(r)\overrightarrow{u_r}$.

1. Donner l'expression de la densité de courant $j(r)$ en fonction de I et de r.
2. Exprimer en fonction de I, r et γ_{sol} , l'expression du potentiel électrique V(r) régnant dans le sol.

Cette répartition non uniforme du potentiel à la surface de la Terre explique le foudroiement indirect des hommes ou des animaux. On appelle R_h la résistance du corps humain mesurée entre ses deux pieds supposés distants de a. Pour ne pas être électrocuté (c'est-à-dire pour que son corps ne soit pas traversé par un courant supérieur à une valeur seuil notée : I_{max}), un homme doit rester éloigné d'une distance au moins égale à D de la prise de terre.

3. Trouver une relation entre D, a, R_h, I, I_{max} et γ_{sol} . Moyennant une hypothèse dont on vérifiera la pertinence a posteriori, exprimer et calculer D numériquement.
4. Ce phénomène d'électrocution à distance touche-t-il plutôt les grands animaux (vaches, chevaux, ...) ou les petits animaux (lapins, renards, ...) ?
5. Donner l'expression de la résistance globale, notée R_{glob} de la prise de terre (métal + sol) en fonction de $\gamma_{métal}$, γ_{sol}, R_a et R_b.
6. La législation en termes de sécurité électrique impose que $R_{glob} < 25\ \Omega$. La législation est-elle respectée ici ? Sinon, que préconisez-vous pour remédier à ce problème ?

Données :

- Conductivités : $\gamma_{sol} = 1{,}0.10^{-2}$ S.m^{-1} ; $\gamma_{métal} = 6$ S.m^{-1}
- Distances : $R_a = 1{,}0$ cm; $R_a = 35$ cm
- Résistance du corps humain : $R_h = 2{,}5$ kΩ ;
- Courant seuil : $I_{max} = 25$ mA.

Exercice 5 : Résistance de l'atmosphère

1. On envisage tout d'abord un modèle très rustique, en géométrie sphérique. La Terre est supposée parfaitement sphérique, de rayon $R_1 = 6400$ km. On considère la couche de l'atmosphère (constituée de la troposhère et de la stratosphère) située en-dessous de l'ionosphère ; cette couche sphérique a pour épaisseur $H = 50$ km (elle est donc comprise entre les sphères de rayons R_1 et $R_2 = R_1 + H$). Cette couche est un milieu faiblement conducteur par beau temps, de conductivité $\sigma \approx 3.\ 10^{-14}$ S.m^{-1}. On considère que le sol est au potentiel V_1 négatif et que l'ionosphère est au potentiel $V_2 = 0$ V.
   Exprimer puis calculer numériquement la résistance de cette portion d'atmosphère.
2. Quelle erreur aurait-on commise en adoptant un modèle 1D ? On attend une réponse quantitative et une interprétation du résultat.

En fait, la conductivité de l'air varie avec l'altitude. Pour en tenir compte, nous allons faire une étude locale à 1D : la couche d'atmosphère considérée est contenue entre le sol localement plan de surface $S = 500$ Mkm^2, au potentiel V_0, et l'interface stratosphère – ionosphère localement plane de même surface S située à l'altitude $H = 50$ km, au potentiel V_H.

Un courant $I_0 = 1500$ A traverse la couche d'atmosphère de l'ionosphère vers le sol. Le courant de retour est assuré par les orages dont il ne sera pas question ici.

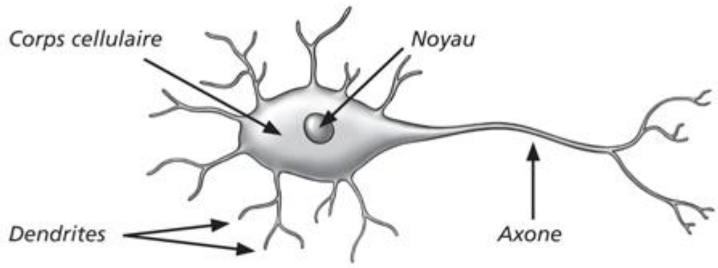
La conductivité électrique à l'altitude z est donnée par la loi $\sigma(z) = \sigma_0 \exp\left(\frac{z}{a}\right)$ où $a = 4{,}0$ km.

3. Exprimer le champ électrique $\vec{E}(z)$ à l'altitude z.

4. Au niveau du sol, on mesure le champ électrique $\vec{E}(z=0) = E_0\overrightarrow{u_z}$ et on trouve $E_0 =$ -100 V.m^{-1}. Calculer σ_0.
5. Calculer le potentiel électrique la différence de potentiel $V(H) - V(0)$. En déduire la résistance de la couche d'atmosphère. Commenter.

Exercice 6 : Axone

L'axone, ou fibre nerveuse, est le prolongement du neurone qui conduit le signal électrique du corps cellulaire vers les zones synaptiques.



Un axone est constitué d'une partie interne cylindrique, nommée axoplasme, de rayon $r =$ 2,0 µm, de longueur $\ell =$ 1,0 cm et de résistivité $\rho_a =$ 2,0 Ω.m. L'axoplasme est entouré d'une membrane myélinisée d'épaisseur $e =$ 7,5 nm et de résistivité $\rho_m =$ 8,1.10^9 Ω.m.

1. Calculer la résistance R_a de l'axoplasme caractérisant la conduction axiale du courant, et la résistance de fuite R_m de la membrane myélinisée caractérisant les courants de fuite radiaux.
2. La résistance de fuite R_m de la membrane myélinisée est due à la présence de pores cylindriques de rayon $b =$ 0,10 nm remplis d'un fluide de résistivité $\rho_b =$ 0,20 Ω.m. Combien de pores contient la membrane ?
3. A l'état de repos, le potentiel de l'axoplasme est de -90 mV par rapport au fluide extérieur (dont le potentiel est donc choisi nul). Quels sont la direction, le sens et la valeur du champ électrique régnant dans la membrane ?
4. On suppose que l'axoplasme est rempli d'un fluide contenant des ions, principalement Na^+, K^+ et Cl^-. A partir des données ci-dessous, estimer la résistivité ρ_a de l'axoplasme. Commenter.

Ion	Na^+	K^+	Cl^-
Concentration (mmol.L^{-1})	12	155	4
Mobilité (V^{-1}.m^2.s^{-1})	5,20.10^{-8}	7,64.10^{-8}	-7,91.10^{-8}

Constante de Faraday : $\mathcal{F} = \mathcal{N}_A e \approx$ 96500 C

2. Diffusion de matière

Exercice 7 : Evaluation d'un coefficient de diffusion

On place une solution fortement concentrée de permanganate de potassium dans un tube à essai rempli d'eau : on opère en injectant lentement et avec soin le permanganate de potassium à l'aide d'une pipette Pasteur au sein de l'eau, en évitant au maximum de brasser le milieu. Initialement, la zone colorée occupe une zone d'épaisseur 1 cm. Au bout de 6 h, elle s'étend sur 6 cm.

Estimer le coefficient *D* de diffusion du permanganate dans l'eau. Commenter.

Donnée : valeur tabulée *D* = 4.10^{-9} SI.

Exercice 8 : Transport transmembranaire entre cellules

On s'intéresse dans cet exercice au flux intercellulaire qui est le mécanisme par lequel des macromolécules ou des ions sont transférés entre deux cellules. Ce transport s'effectue au travers de pores dans les membranes plasmiques.
On se place dans une situation modèle simple :

- deux cellules 1 et 2 sont en contact l'une avec l'autre ;
- les densités particulaires en protéines au sein des cellules sont constantes et uniformes.

On note n_1 et n_2 les densités particulaires en protéines au sein des deux cellules de même volume V. Un pore de la membrane est assimilable à un capillaire de section s et de longueur e. La surface de contact entre les cellules est notée S et les pores occupent une fraction surfacique f de la membrane. Le coefficient de diffusion des protéines dans les pores est noté D.

1. Montrer que le flux Φ des molécules à travers la membrane est de la forme $\Phi = \alpha(n_1 - n_2)$ où α est une constante que l'on exprimera en fonction de D, f, S et e. Interpréter ce coefficient en proposant une analogie avec un autre phénomène de transport.

En réalité, n_1 et n_2 dépendent lentement du temps. On suppose que les résultats établis précédemment restent valables.

2. Etablir les équations différentielles vérifiées par $n_1(t)$ et $n_2(t)$.

On cherche à mettre en évidence l'évolution temporelle de $n_1(t)$ et $n_2(t)$ en effectuant une expérience de redistribution de fluorescence après photoblanchiment (FRAP : fluorescence recovery after photo-bleaching). En effet, les protéines étudiées sont fluorescentes ; à l'instant initial, on soumet la cellule 2 à un flash lumineux qui a pour effet d'inhiber de manière définitive la fluorescence des protéines qui y sont contenues à cet instant. On suit ensuite l'évolution de l'intensité lumineuse pour les deux cellules au cours du temps.

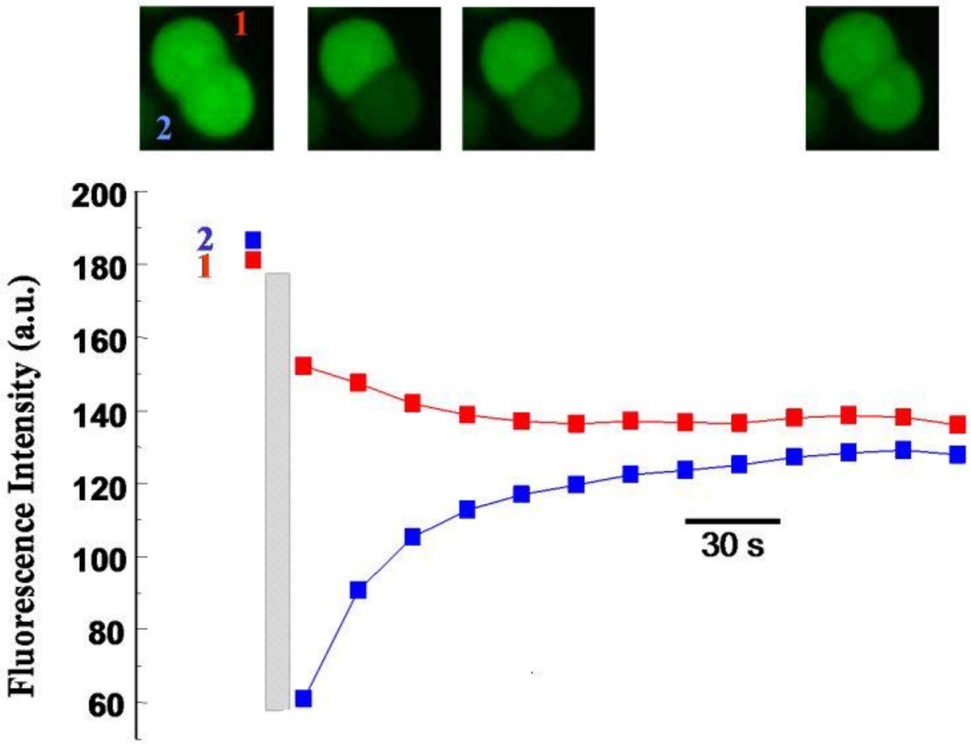


Figure 1 : Evolution du niveau de fluorescence en fonction du temps pour chacune des deux cellules. Le cadre grisé correspond à l'instant où l'on inhibe la fluorescence des protéines de la cellule 2. (d'après Clair et al., Journal of Cell Science, 2001)

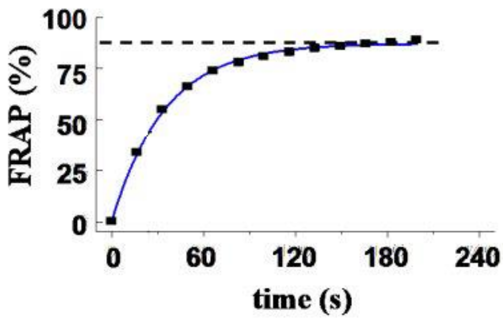


Figure 2 : Evolution du niveau de fluorescence normalisé en fonction du temps pour la cellule 2. (d'après Clair et al., Journal of Cell Science, 2001)

3. Le modèle précédent est-il en accord avec la forme des courbes expérimentales ?
4. Pour des protéines moins mobiles, il existe un problème d'internalisation : la protéine peut être consommée par la cellule. Le nombre de protéines consommées par unité de volume et de temps est $k.n(t)$. Etablir les équations différentielles vérifiées dans ce cas par $n_1(t)$ et $n_2(t)$. Commenter en déterminant notamment l'évolution de $n_1(t) + n_2(t)$.

Exercice 9 : Taille critique d'une bactérie

On étudie les conditions de survie d'une bactérie aérobie dans un lac de très grande de taille. Pour vivre, elle a besoin de consommer le dioxygène dissous dans l'eau au voisinage de sa surface. La bactérie est modélisée par une sphère fixe de rayon R et sa masse volumique μ est assimilée à celle de l'eau. Le régime est considéré comme stationnaire et on note $n(r)$ la densité particulaire du dioxygène dissous à la distance r du centre de la bactérie ($r > R$). Le coefficient de diffusion du dioxygène dans l'eau vaut D = 2,0.10^{-9} m^2.s^{-1}. À grande distance de la bactérie, la concentration molaire du dioxygène dissous dans le lac est constante et égale c_0 = 2,0.10^{-4} mol.L^{-1}. On admet que la consommation en dioxygène de la bactérie est proportionnelle à sa masse et on introduit A le taux horaire de consommation de dioxygène par unité de masse, mesuré en mol.kg^{-1}.s^{-1}.

1. Exprimer le nombre $\Phi(r)$ de molécules de dioxygène entrant par unité de temps dans une sphère de rayon $r > R$ en fonction de D et de $n(r)$. Justifier que $\Phi(r)$ ne dépend pas de r.
2. Déterminer l'expression de n_s, densité particulaire en dioxygène dissous sur la surface extérieure de la bactérie ($n_s = n(R^+)$).
3. Ecrire la relation liant Φ et R, μ, et A. En déduire l'expression de n_s en fonction de R, μ, A, D, et c_0.
4. Quelle inégalité doit vérifier n_s afin que la bactérie ne suffoque pas ? En déduire l'expression du rayon critique R_C d'une bactérie aérobie en fonction de μ, A, D et c_0, puis calculer sa valeur sachant que A = 2,0.10^{-2} mol.kg^{-1}.s^{-1}. Comparer cette valeur à la dimension caractéristique R = 1 µm de la bactérie *E.Coli*.

Exercice 10 : Durée d'évaporation

Un cristallisoir de rayon $R =$ 30 mm et de hauteur $H =$ 10 mm est posé sur une table et contient de l'eau de profondeur initiale $h(t = 0)$ = 2 mm. La température de la pièce vaut $T =$ 25 °C. On donne le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air à 25 °C : $D =$ 2.10^{-5} m^2.s^{-1}, et la pression de vapeur saturante de l'eau à 25 °C vaut $P_s =$ 32 mbar. On suppose le phénomène très lent. On donne la constante de Boltzmann $k_B = \frac{R}{\mathcal{N}_A}$ = 1,38.10^{-23} J.K^{-1}.

Au bout de combien de temps l'eau a-t-elle disparu ?

Indications :

- Emettre une hypothèse raisonnable sur le champ de densité particulaire au-dessus de l'eau liquide ; le déterminer en écrivant les bonnes conditions aux limites…
- Relier le flux diffusif de particules au taux de variation de $h(t)$.
- Réponse : $t = \frac{\rho_{eau}RT}{MDP_s} h_0 \left(H - \frac{h_0}{2}\right) \approx$ 10,8 h.

Exercice 11 : Décantation de boues résiduelles

Nous cherchons ici à modéliser les processus de sédimentation, sous l'action du champ de pesanteur $\vec{g} = -g\overrightarrow{u_z}$, permettant de décanter des boues résiduelles. L'eau à traiter est placée dans un bac décanteur. Elle est assimilée à une suspension de particules d'argile sphériques identiques de rayon r. On assimile le bac décanteur à une cuve de hauteur H = 2 m et de section S. Nous allons nous intéresser à l'évolution de la densité volumique de particules n sous l'effet de la diffusion et de la gravité. En l'absence de diffusion, les particules ont un mouvement d'ensemble (convection) rectiligne uniforme dirigé vers le fond du bac, à une vitesse notée $\vec{v}_{conv}$. On donne également le coefficient D de diffusion des particules de boue dans l'eau.

1. Définir le vecteur densité de courant particulaire de convection $\vec{J}_{conv}$ et l'exprimer n et de $\vec{v}_{conv}$. Quelle est son orientation ? Quelle est l'orientation du vecteur densité de courant de diffusion $\vec{J}_{diff}$ des particules de boue ?
2. On se place en régime stationnaire. Comment se traduit cette hypothèse quant aux vecteurs densité de courant de convection $\vec{J}_{conv}$ et de diffusion $\vec{J}_{diff}$?
3. Quelle est, sous cette hypothèse, l'équation différentielle qui régit la densité de particules $n(z)$? La résoudre en introduisant une longueur caractéristique δ (on posera $n(z=0)=n_0$).
4. Déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}_{conv}$ en supposant que les particules d'argile subissent une force de frottement fluide donnée par la loi de Stokes. On tiendra compte de la densité $d=1{,}7$ de l'argile.
5. Quelle énergie potentielle $E_p(z)$ peut-on attribuer à une particule d'argile ?

On admet par ailleurs que la répartition des particules d'argile suit la loi de Boltzmann :

$$n(z) \propto \exp\left(-\frac{E_p(z)}{k_B T}\right).$$

6. Montrer la relation d'Einstein : $D=\frac{k_B T}{6\pi\eta r}$ oùk_B est la constante de Boltzmann et η la viscosité dynamique de l'eau.
7. Calculer numériquement la distance δ et le coefficient de diffusion D des particules d'argile dans l'eau à 300 K. Conclure.

Données : $k_B = 1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1} ; $\eta = 1{,}0.10^{-3}$ Pa.s

Exercice 12 : Injection intraveineuse

On considère une veine cylindrique, de rayon a et d'axe Ox, parcourue par un écoulement sanguin unidimensionnel de champ de vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$. On injecte en $x=0$ une substance et on suppose que la densité particulaire de cette substance est maintenue constante au point d'injection : $n(x=0,t)=n_0$. On note D le coefficient de diffusion du produit dans le sang.

1. Déterminer l'équation différentielle qui régit (x,t) . Pour une longueur L donnée, faire apparaître deux temps caractéristiques de diffusion et de convection. Quel est en mécanique des fluides le nombre analogue au rapport $\xi = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}}$?
2. Déterminer $n(x)$ en régime stationnaire et tracer sa courbe représentative. Commenter.
3. La dose critique de produit que peut admettre un organe situé en amont du point d'injection, en $x=-L$ est n_c. Calculer la valeur de n_0 permettant d'avoir $n_{max}(-L)=\frac{n_c}{10000}$.
   Faire l'application numérique pour la concentration c_0 avec $L = 10$ cm ; $D = 10^{-4}$ m^2.s^{-1} ; $v_0 = 0{,}01$ m.s^{-1} ; $c_c = 10^{-4}$ mol.L^{-1}.

Exercice 13 : Réacteur nucléaire

Le fonctionnement du cœur d'un réacteur nucléaire limité par deux plans d'abscisses $x=0$ et $x=L$, de section S, est modélisé à 1D par :

- une production de neutrons σ par unité de volume et de temps, provenant des réactions de fission, avec $\sigma(x,t)=\frac{n(x,t)}{\tau}$ où $n(x,t)$ désigne la densité volumique de neutrons ;
- une zone de piégeage appelée couverture : pour $x\leq 0$ ou $x \geq L$, on a $n(x,t)=0$.

On donne le coefficient de diffusion D des neutrons dans le cœur du réacteur.

1. Établir l'équation vérifiée par $n(x,t)$. Quelle est la signification de τ ? Quelle serait l'évolution temporelle de n à x fixé sans le phénomène de diffusion ? Commenter quant au rôle de la diffusion.

2. Déterminer $n(x)$ en régime permanent. En déduire qu'il existe une condition liant τ à D et L (on admettra que le réacteur est dimensionné de telle sorte que ce soit la plus grande valeur permise de τ compatible avec la taille du réacteur qui est la bonne). Que se passe-t-il si τ est Différent de la valeur requise ?
3. Récrire $n(x)$ en fonction de L, S et N_0, nombre total de neutrons dans le réacteur. Quelle est la densité maximale des neutrons ? Déterminer le flux de neutrons vers les zones de couverture. Comparer le flux total sortant à la production totale de neutrons.

Lors d'un arrêt d'urgence, des barres de piégeage plongent dans le cœur du réacteur. Le taux de production volumique global des neutrons peut alors être négatif (si le piégeage l'emporte sur la fission) : $\sigma(x,t) = \frac{n(x,t)}{\tau'}$ avec τ' algébrique.

4. Rechercher la solution de l'équation de diffusion sous la forme $(x,t) = f\,(x).g(t)$. On suppose que le régime permanent était atteint à l'instant $= 0$. En déduire le type de régime obtenu selon la valeur de τ'.

Exercice 14 : Diffusion de charges dans un capteur CCD

Le capteur CCD KAF 0400 construit par la marque Kodak™ possède 393.000 pixels carrés répartis sur une matrice rectangulaire de dimensions 6,91 mm x 4,6 mm. Chaque pixel mesure
$a\,x\,a$ = 9 µm x 9 µm. Lors d'une prise de vue, une charge apparaît sur chaque pixel, lequel se comporte comme un condensateur. Lors d'une prise de vue, une charge apparaît sur chaque pixel, lequel se comporte comme un condensateur. Ces charges doivent être transférées rapidement à la mémoire de l'appareil afin de numériser la photo car sinon un transfert de charges a lieu d'un pixel vers ses 4 plus proches voisins, dégradant ainsi la photo.

1. Proposer une modélisation électrocinétique du capteur.
2. Quelle analogie peut-on faire avec la diffusion de particules ? Montrer en particulier que le phénomène est bien régi par une équation de diffusion à 2D. Quel est le coefficient de diffusion D caractérisant ce phénomène ?
3. La fiche technique du constructeur donne les informations suivantes :
    - Capacité de stockage d'un pixel : 100.000 électrons
    - Sensibilité d'un pixel : 10 µV/électron
    - Courant de fuite global par pixel : 20 électrons/s
    - Durée de transfert de la charge à la mémoire, pour un pixel : 100 ns

   A l'aide de ces données, proposer des valeurs numériques pour les composants du modèle électrocinétique ainsi que la valeur du coefficient de diffusion D.

3. Diffusion – conduction thermique

Exercice 15 : Temps de cuisson d'une dinde de Noël et d'un gâteau d'anniversaire

Soit une dinde de Noël, pesant 3,5 kg, à faire cuire. L'an passé, la dinde pesait 2,5 kg et était (bien) cuite au bout de 1 heure 30.

1. Proposer des hypothèses raisonnables et trouver la loi de variation liant le temps de cuisson avec la masse de la dinde à cuire. Déterminer le temps de cuisson de la dinde de 3,5 kg.
2. Que pensez-vous des lois de cuisson du type « tant de minutes par kilo » généralement proposées par les manuels de cuisine ? En suivant une telle loi, les grosses dindes sont-elles trop ou trop peu cuites?
3. C'est l'anniversaire de votre petit frère ! Il invite ses petits copains pour fêter l'événement. N'écoutant que votre bon cœur, vous entreprenez de leur confectionner un délicieux gâteau (au chocolat évidemment !). Seulement voilà ! Vous disposez de la recette pour 4 personnes (temps de cuisson conseillé 30 minutes) et les joyeux drilles seront 8 autour de la table. Quel temps de cuisson allez-vous adopter ? (Règle du jeu : vous n'avez pas le droit de changer de moule…)

Exercice 16 : Double vitrage

On cherche ici à comparer l'efficacité d'un simple et d'un double vitrage en termes d'isolation thermique. On considère une surface vitrée d'aire S séparant l'intérieur d'une pièce à la température T_i et l'extérieur à la température T_e. On suppose le problème unidimensionnel : le profil de température ne dépend que de x, l'axe Ox étant perpendiculaire à la fenêtre.

1. Calculer l'ordre de grandeur (en W) des pertes thermiques traversant une vitre de surface S, et d'épaisseur e en hiver. La résistance thermique de la vitre donnée par le constructeur vaut 0,17 W.K^{-1}. Commenter.
2. Proposer un modèle et calculer maintenant la résistance thermique d'un double vitrage de surface S, consitué de deux vitres d'épaisseur e, séparées par une couche d'air d'épaisseur e'. Comparer à la valeur donnée par le constructeur : 0,28 W.K^{-1}. Que valent maintenant les pertes thermiques ? Commenter.

Données : $S = 1{,}0$ m^2 ; $e = 4{,}0$ mm ; $e' = 6{,}0$ mm ; $\lambda_v = 1{,}6$ W.m^{-1}.K^{-1} ; $\lambda_{air} = 0{,}02$ W.m^{-1}.K^{-1} ;

$h = h_i = 9{,}1$ W.m^{-2}.K^{-1} pour une interface verre-air intérieur ;

$h = h_e = 16{,}6$ W.m^{-2}.K^{-1} pour une interface verre-air extérieur.

Exercice 17 : Pourquoi n'y a-t-il pas de petits mammifères marins ?

On assimile un mammifère marin à une sphère de rayon R émettant en continu une puissance $\mathcal{P}$ dans l'océan qui l'environne (conductivité thermique $\lambda = 0{,}6$ W.m^{-1}.K^{-1}).

1) Evaluer la température T_S de la surface de l'animal.
2) En supposant que la puissance $\mathcal{P}$ produite par le métabolisme de l'animal est proportionnelle à sa masse, montrer que le rayon R ne peut être inférieur à une valeur minimale.
3) Pourquoi existe-t-il de petits mammifères terrestres et aériens ?

Exercice 18 : Assemblée de manchots

Face à une température extérieure basse (air et sol) ($\theta_e = -20$ °C), le manchot, animal à sang chaud, maintient sa température interne ($\theta_i = 37$ °C) au moyen d'un apport métabolique $\mathcal{P}_{méta} = 50$ W qui compense les pertes par conduction thermique au travers d'un revêtement de plumes d'épaisseur $e = 1$ cm et de conductivité λ.
On modélise le corps du manchot (sans les plumes) par un parallélépipède de section carrée de coté $a = 10$ cm et de hauteur $h = 50$ cm. On s'intéresse à la conduction thermique au travers de la couche de plumes.

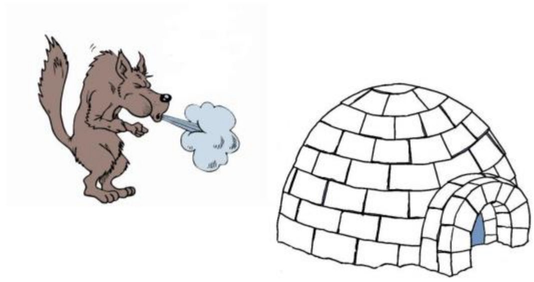
1. Exprimer le flux thermique traversant la couche de plumes en fonction de λ, θ_i, θ_e, e, h et a.
2. Déterminer la conductivité thermique λ du revêtement de plumes.

Pour faire face aux températures extrêmes, les manchots se serrent les uns contre les autres. Ainsi, seules les faces supérieure, inférieure et latérale sont sujettes aux pertes thermiques. On considère neuf manchots se serrant les uns contre les autres.

3. En proposant une disposition prise par ces neufs manchots, exprimer la puissance métabolique totale nécessaire au maintien de la température interne des neufs manchots.
4. De combien le métabolisme, ramené à un seul manchot, est-il réduit par rapport à la situation où le manchot est seul ?

Exercice 19 : Les trois petits cochons au pôle Nord

Au cours d'une expédition polaire, les trois petits cochons décident de construire un igloo de forme hémisphérique. Ils s'accordent sur un rayon intérieur $R = 1$ m et une épaisseur de glace de $e = 30$ cm. L'air extérieur est à la température $T_e = -5$ °C, supposée constante.
Au moment où l'igloo est achevé, le grand méchant loup surgit. Les trois petits cochons se précipitent à l'intérieur de l'igloo et obstruent l'entrée par un dernier morceau de glace. Le loup se met à souffler mais l'igloo reste en place. Ayant bien remarqué l'absence de cheminée, il se dit que sa seule chance est de continuer à souffler.



Un régime stationnaire s'établit alors entre l'intérieur et l'extérieur de l'igloo.
On donne, pour la glace :

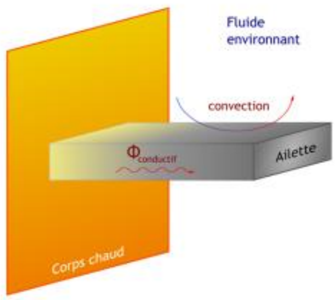
- Conductivité thermique : $\lambda = 2{,}0$ W.m^{-1}.K^{-1}
- Capacité thermique massique $c \ = 2{,}1$ kJ.kg^{-1}.K^{-1}
- Masse volumique $\varrho = 9{,}2.102$ kg.m^{-3}

Il existe des transferts conducto-convectifs entre l'air intérieur et la paroi intérieure de l'igloo (coefficient de transfert conducto-convectif $h_i \ = 5{,}0$ W.m^{-2}.K^{-1}) d'une part, et entre l'air extérieur et la paroi extérieure (coefficient de transfert $h_s \ = 100$ W.m^{-2}.K^{-1} quand le loup souffle,
$h_e \ = 10$ W.m^{-2}.K^{-1} quand il ne souffle plus) d'autre part.

Affamé par des mois de jeûne forcé, le loup souffle sur l'igloo.

1. Exprimer puis calculer la résistance thermique de l'igloo.
2. Sachant que chaque petit cochon libère une puissance de 80 W, calculer la température qui règne à l'intérieur de l'igloo ainsi que la température sur sa paroi interne.
3. Le loup, épuisé, s'arrête de souffler mais les trois petits cochons restent enfermés à l'intérieur. La glace fond-elle ? Si oui, de quel côté et sur quelle épaisseur ?
4. Question de culture générale : quels sont les prénoms des trois petits cochons ?

Exercice 20 : Ailette de refroidissement



Pour éviter un échauffement trop important de certains appareils et évacuer la chaleur vers l'atmosphère, on a souvent recours à un dispositif (radiateur) constitué d'ailettes de refroidissement, que l'on fixe à l'appareil que l'on souhaite refroidir. Dans cet exercice, on étudie une unique ailette de refroidissement constituée d'un matériau métallique (M) de conductivité thermique λ, de section

rectangulaire (cotés a et e avec $a \gg e$) et de longueur L, est soudée en $x = 0$ à la paroi d'une source chaude de température constante T_0.
On se place en régime stationnaire et on suppose que la température est uniforme sur une section droite de l'ailette d'abscisse x : $T(x, y, z, t) = T(x)$.
L'ailette baigne dans l'air de température constante T_a. A l'abscisse x, l'échange de chaleur entre l'ailette à la température $T(x)$ et l'air ambiant de température T_a se fait par un flux conducto-convectif où la puissance cédée au milieu extérieur est : $d\mathcal{P} = h(T(x) - T_a)dS$.

1. Déterminer l'équation différentielle régissant le champ de température $T(x)$ dans l'ailette. On fera apparaître une distance δ caractéristique du problème, que l'on exprimera en fonction de λ, h et e.
2. On suppose l'ailette de très grande longueur : $L \gg \delta$. Déterminer le champ de température $T(x)$ dans l'ailette.
3. Calculer le flux thermique total $\phi_{ailette}$ évacué par l'ailette.
4. En l'absence d'ailette, la source de température T_0 serait directement au contact de l'atmosphère par l'intermédiaire d'une surface d'échange équivalente ae. Que vaudrait le flux ϕ_0 évacué vers l'atmosphère ?
   Proposer une définition de l'efficacité η de l'ailette et en donner l'expression. A quelle condition l'ailette est-elle efficace ?
5. Comparer le flux diffusif axial et le flux conducto-convectif transverse. En déduire une condition de validité de l'hypothèse d'uniformité de la température sur une section droite de l'ailette.
6. On donne les valeurs numériques suivantes :
   $\lambda = 100$ W.m^{-1}.K^{-1} ; $h = 100$ W.m^{-2}.K^{-1} ; $e = 5$ mm ; $L = 10$ cm.
   Calculer l'efficacité de l'ailette et discuter la validité des hypothèses faites. Proposer, si nécessaire, une (ou des) modification(s) du modèle et la (les) mettre œuvre.

Exercice 21 : Expérience d'Ingen-Ousz

On considère un barreau cylindrique plein en cuivre, à base circulaire de rayon r, de longueur ℓ, de conductivité thermique λ, d'axe Ox. On le met en contact par une de ses extrémités $x = 0$ avec de l'eau bouillante de température $T_0 = 373$ K . La température de l'air est $T_{air} = 293$ K et le coefficient de transfert conducto-convectif à l'interface cuivre – air est noté h. On se place en régime permanent et on suppose que la température du cuivre ne dépend que de l'abscisse x : $T = T(x)$.

1. Déterminer la loi donnant $T(x)$ en supposant la longueur ℓ suffisamment grande. On précisera cette dernière condition.
2. On place comme précédemment deux cylindres de même géométrie, mais constitués par deux métaux différents de conductivités thermiques λ_1 et λ_2 . Les deux barreaux sont recouverts de paraffine dont la température de fusion vaut $T_f = 333$ K. On constate qu'en régime permanent, la paraffine fond sur des distances $x_1 = 15{,}6$ cm pour le premier cylindre et $x_2 = 6{,}4$ cm pour le second. On connaît la conductivité thermique $\lambda_1 = 390$ W.m^{-1}.K^{-1} du premier métal. En déduire celle du second.
3. Donner la valeur numérique de h sachant que $r = 1$ cm .

Exercice 22 : Géothermie

La croûte continentale a une épaisseur ℓ d'environ 35 km. On donne la température à 35 km de profondeur $\theta_1 = 600°C$ et la température du sol $\theta_2 = 0°C$. On assimile la croûte continentale à un matériau homogène de conductivité thermique moyenne $\lambda = 2{,}6$ W.m^{-1}.K^{-1}. On la suppose constituée essentiellement de granite dont on donne ci-dessous les principaux éléments radioactifs à prendre en compte dans le bilan thermique : uranium, thorium et potassium. On donne notamment leur période

T (ou temps de demi-vie), leur titre massique x (masse de l'élément par unité de masse de granite), ainsi que la quantité d'énergie thermique E dégagée par la désintégration d'un noyau. La masse molaire M de ces éléments (en g.mol^{-1}) sera prise égale au nombre de masse.

Élément	$^{238}\mathrm{U}$	$^{232}\mathrm{Th}$	$^{40}\mathrm{K}$
T (milliards d'années)	4,5	13,9	1,3
x	4,7. 10^{-6}	2. 10^{-5}	3,4. 10^{-4}
E (MeV)	48	40	8,8.10^{-3}

1. Quel est le nombre de désintégrations par unité de temps $-\frac{dN}{dt}$ d'une population N de noyaux radioactifs de période T ? Calculer le nombre de noyaux N_{U}, N_{Th} et N_{K} de chacun de ces éléments par unité de masse de granite.
2. Calculer les puissances thermiques $\mathcal{P}_{\mathrm{U}}$, $\mathcal{P}_{\mathrm{Th}}$ et $\mathcal{P}_{\mathrm{K}}$ dégagées par unité de masse de granite pour chacun des trois isotopes.
   Le granite ayant une masse volumique moyenne $\rho = 2{,}8.10^3$ kg.m^{-3}, calculer la puissance thermique p_v dégagée par unité de volume de granite.
3. Quelle hypothèse raisonnable peut-on émettre quant à la géométrie du problème ?
4. Déterminer le champ de température $\theta(z)$ régnant dans la croûte continentale en régime stationnaire à la profondeur z.
5. En déduire le flux géothermique surfacique $j_{géo}$ au niveau du sol ; commenter les deux termes qui apparaissent. Les évaluer numériquement et les comparer.
6. Question sur le programme de géographie de CM2 : quelle est la superficie de la France ?
   En déduire une évaluation du nombre de tranches de 1200 MW de centrale nucléaire correspondant à la puissance géothermique totale dégagée dans le sol français.

Exercice 23 : Gel d'un lac

Lorsque l'air au-dessus d'un lac est à une température $T_a < T_{fus}$, on constate que l'épaisseur $e(t)$ de la couche de glace croît lentement selon la loi $e(t) \propto \sqrt{t}$ aux temps longs. On suppose que l'eau liquide située sous la glace est à la température T_{fus}, supposée uniforme et on note $T(z,t)$ la température de la glace ($0 \leq z \leq e(t)$). On suppose qu'à chaque instant t le profil de température $T(z,t)$ dans la glace est le même que si on était en régime stationnaire (approximation des régimes quasi-stationnaires).

Données : enthalpie massique de fusion de la glace ℓ_{fus} = 333 kJ.kg^{-1} ; capacité thermique massique de la glace $c = 4{,}18$ kJ.K^{-1}.kg^{-1} ; masse volumique de la glace $\mu = 917$ kg.m^{-3} ; conductivité thermique de la glace $\lambda = 2{,}10$ W.m^{-1}.K^{-1}.

1) *Modèle 1 :* on suppose que l'air impose sa température T_a à la surface du lac.
   a) Montrer que l'épaisseur $e(t)$ vérifie l'équation différentielle : $e\frac{de}{dt} = \frac{\lambda(T_{fus}-T_a)}{\mu \ell_{fus}}$.
   b) Ce modèle rend-il compte de la loi $e(t) \propto \sqrt{t}$ aux temps longs ?
   c) Discuter quantitativement la validité de l'ARQS.
2) *Modèle 2 :* on souhaite prendre en compte les transferts conducto-convectifs à l'interface air-glace (on introduit donc un coefficient de Newton, h, d'autant plus élevé que le vent souffle fort).
   A quelle condition le modèle 1 reste-t-il valide ? Cette condition vous semble-t-elle restrictive ?

Exercice 24 : L'âge de la Terre selon Lord Kelvin

Pour estimer l'âge de la Terre, Lord Kelvin proposa le modèle suivant :

(i) on assimile la Terre au demi-espace $x \leq 0$, et on suppose que l'atmosphère impose la condition aux limites $T(0,t) = T_0 =$ 300 K ;

(ii) la Terre s'est formée par solidification de roches à la température $T_f =$ 2300 K, ce qui fixe la condition initiale $T(x < 0{,}0) = T_f$;

(iii) depuis lors, la Terre se refroidit lentement en évacuant vers l'atmosphère un flux surfacique qui vaut actuellement $j_{th}(0,t) =$ 80 mW.m^{-2}.

Données moyennes :

- masse volumique $\mu =$ 2700 kg.m^{-3}
- capacité thermique massique : $c =$ 1 kJ.K^{-1}.kg^{-1}
- conductivité thermique $\lambda =$ 2 W.m^{-1}.K^{-1}.

Formulaire :

- la fonction $f(x,t) = \int_0^u \exp(-v^2)dv$ où $u = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$ est solution de l'équation de diffusion (D étant le coefficient de diffusion) ;
- $\int_0^{+\infty} \exp(-v^2)dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1) Expliquer pourquoi on peut chercher le champ de température $T(x,t)$ sous la forme $T(x,t) = a + bf(x,t)$. Déterminer les constantes a et b.
2) En déduire $j_{th}(0,t)$ ainsi qu'une estimation de l'âge de la Terre.
3) La découverte postérieure de la radioactivité a permis une nouvelle évaluation de l'âge de la Terre cent fois plus élevée. L'erreur commise sur l'évaluation de l'âge de la Terre est-elle imputable au modèle d'une Terre plate ?

Exercice 25 : Dimensionnement d'un réacteur chimique

Un réacteur chimique adiabatique cylindrique d'axe Ox (section S, longueur L) est le siège d'une réaction chimique exothermique. On cherche une condition sur sa taille pour éviter un emballement de la réaction, et donc une explosion.

On suppose que le problème est unidimensionnel : le champ de température est donc de la forme $T(x,t)$. Le mélange réactionnel est assimilé à un milieu homogène (conductivité thermique λ, masse volumique μ, capacité thermique massique à volume constant c_v). La réaction chimique est modélisée par un apport de puissance volumique dans le milieu $p_{vol}(x,t) = A(T(x,t) - T_0)$ où T_0 est une température « d'activation » caractéristique de la réaction. On ne prend pas en compte la convection.

1) Quelle est l'équation aux dérivées partielles qui régit $T(x,t)$?
2) On en cherche des solutions de la forme $T(x,t) = T_0 + T_1 \cos(kx + \varphi) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.
   a) Quelles sont les solutions compatibles avec les hypothèses du problème ?
   b) Comment faut-il choisir la taille du réacteur pour éviter tout risque d'explosion ?

Exercice 26 : Dimensionnement d'un fusible

On s'intéresse dans cet exercice au dimensionnement d'un fusible. Un fusible est constitué d'un fil conducteur cylindrique de longueur L et de rayon a (avec $L \gg a$) entouré d'air, le tout étant contenu dans un tube de verre.

Le fusible (conductivité électrique γ, conductivité thermique λ, température de fusion T_f) est parcouru par un courant I stationnaire et uniformément réparti sur sa section. On suppose que les transferts thermiques n'ont lieu que radialement. On se place en régime stationnaire.

Le but de l'exercice est de déterminer le rayon du fil conducteur pour qu'il fonde lorsque le courant atteint une valeur maximale I_{max} = 10 A.

Données : pour un fusible en zinc : $T_f = 420$ °C ; $\lambda = 116$ W.m^{-1}.K^{-1} ; γ = 1,66.10^{7} Ω^{-1}.m^{-1}

1. Que peut-on dire du champ de température ? En quels points du fusible la température est-elle maximale (aucun calcul n'est demandé ici) ?
2. On considère un premier modèle dans lequel l'air contenu dans le tube de verre impose sa température T_e à la surface du fusible (c'est-à-dire du fil conducteur). Déterminer par analyse dimensionnelle l'expression et la valeur du rayon a en fonction des paramètres : $\theta_f = T_f - T_e$, I_{max}, λ et γ. Effectuer l'application numérique. Qu'en dîtes-vous ?
3. Montrer en effectuant un bilan local sur un système bien choisi que le champ de température est régi par l'équation différentielle : $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{I^2}{\lambda\gamma\pi^2 a^4}$.
   Le déterminer à une constante additive près. Retrouver le résultat de la question 2.
4. On envisage maintenant un second modèle dans lequel on tient compte d'un transfert conducto-convectif vers l'air à la surface du fil. A cet effet, on rappelle la relation de Newton donnant le transfert thermique algébrique du solide vers le fluide, à travers une surface dS, pendant un temps dt : $\delta Q = h(T(r = a) - T_e)\, dS\, dt$. On supposera que $a \ll \frac{\lambda}{h}$ et on prendra *h* = 10 unités S.I..
   Déterminer la nouvelle valeur prise par le rayon a du fil, en fonction notamment de I_{max}. Commenter le résultat obtenu. Interpréter la condition $\ll \frac{\lambda}{h}$.
5. Retrouver le résultat de la question précédente par un bilan de puissance macroscopique.