

# Mécanique quantique

## Exercice 1 : Quantique ou classique ? (1)

Selon vous, l'étude des objets suivants relève-t-elle de la physique quantique ou classique ?

- Un électron de conduction dans un métal, dont l'énergie cinétique est de l'ordre de 10 eV ;
- Une balle de tennis ;
- Une personne se déplaçant à pied ;
- Une molécule de fullerène  $C_{60}$  animée d'une vitesse moyenne de  $220 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  au cours d'une expérience d'interférences moléculaires.

## Exercice 2 : Quantique ou classique ? (2)

Selon vous, l'étude des objets suivants relève-t-elle de la physique quantique ou classique ?

- Un oscillateur électrique LC portant une charge  $q = 0,5 \text{ }\mu\text{C}$ , d'inductance  $L = 40 \text{ mH}$  et de capacité  $C = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$  ;
- Une personne ou un neutron (de masse  $m = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ) en chute libre (quelle serait la hauteur maximale de chute libre correspondant à un régime quantique ?) ;
- Une box Wi-Fi de puissance  $0,1 \text{ W}$  émettant à  $2,4 \text{ GHz}$  ;
- **Un atome** d'hélium dans un vase rempli d'hélium superfluide, entraîné en rotation. Dans ce cas, on observe que l'hélium superfluide reste au repos, hormis à l'intérieur de tourbillons filiformes parallèles à l'axe de rotation du vase. Chaque tourbillon est caractérisé par un diamètre de l'ordre de  $0,1 \text{ mm}$  et par une fréquence de rotation de l'ordre de  $10 \text{ Hz}$ .

## Exercice 3 : Gaz quantique ou classique ?

1. On considère de l'hélium gazeux à température ambiante et à la pression atmosphérique. L'énergie cinétique moyenne d'un atome d'hélium vaut  $E = \frac{3}{2} k_B T$ , où  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$  désigne la constante de Boltzmann. L'étude de ce gaz relève-t-elle de la mécanique quantique ?
2. Dans un métal, chaque atome du cristal métallique libère un électron de conduction. On assimile l'ensemble des électrons de conduction à un gaz où l'énergie de chaque électron est de l'ordre de  $1 \text{ eV}$ . On donne :  $M_{\text{Cu}} = 63 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$  et  $\rho_{\text{Cu}} = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Le phénomène de conduction électrique relève-t-il d'un traitement classique ou quantique ?

## Exercice 4 : Modèle de Bohr

Pour rendre compte de la stabilité de l'atome, Niels Bohr imagina un modèle (1913) selon lequel les électrons devaient se mouvoir sur des orbites circulaires indexées par un entier  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), avec un moment cinétique quantifié : sur l'orbite  $n$ , de rayon  $r_n$ , le moment cinétique de l'électron vaut  $\ell_n = n\hbar$ .

1. Que vaut la quantité de mouvement  $p_n$  d'un électron sur l'orbite  $n$  ?
2. A quelle condition sur les indéterminations  $\Delta r_n$  et  $\Delta p_n$  du rayon et de la quantité de mouvement de l'électron sur la  $n$ -ième orbite peut-on parler de trajectoire au sens classique du terme ?
3. Examiner les cas  $n = 1$  et  $n \gg 1$ . Que pouvez-vous en conclure ?

### Exercice 5 : Fluctuations quantiques ou thermiques pour un oscillateur harmonique

Un oscillateur harmonique unidimensionnel de masse  $m$  et de pulsation propre  $\omega_0$  a pour énergie potentielle :  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$ . Sa position moyenne  $\langle x \rangle$  et sa quantité de mouvement moyenne  $\langle p_x \rangle$  sont toutes deux nulles.

1. Montrer que l'énergie moyenne  $\langle E \rangle$  de l'oscillateur harmonique vérifie :

$$\langle E \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{m\omega_0^2}{2}(\Delta x)^2, \text{ où } \Delta x \text{ désigne l'indétermination quantique sur la position } x \text{ de l'oscillateur.}$$

2. Déterminer l'énergie minimale  $E_0$  de l'oscillateur harmonique, ainsi que l'indétermination quantique  $\Delta x_0$  de l'oscillateur harmonique dans son état fondamental.
3. A température non nulle, en raison de l'agitation thermique, la position de l'oscillateur harmonique est aussi affectée par des fluctuations d'origine thermique, dont l'amplitude<sup>1</sup> est donnée par  $\Delta x_{th} = \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega_0^2}}$ , où  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$  désigne la constante de Boltzmann.

Déterminer la température critique  $T_C$  en dessous de laquelle les fluctuations quantiques prennent le pas sur les fluctuations thermiques.

4. Evaluer  $T_C$  pour un oscillateur mécanique constitué d'une masse suspendue à un ressort. Commenter.
5. En 2010, une équipe de l'UCSB (University of California Santa Barbara) a atteint le régime quantique en amenant un micro-résonateur piézoélectrique de fréquence très élevée (6,0 GHz) à une température de 25 mK. Commenter.

### Exercice 6 : Particule dans une boîte unidimensionnelle

Une particule de masse  $m$  et d'énergie  $E$  est confinée dans l'intervalle  $0 \leq x \leq L$  où son énergie potentielle est choisie nulle.

1. On envisage pour l'instant un traitement classique. On admet que la probabilité de présence  $dP_{cl}$  de la particule entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  est proportionnelle au temps  $dt$  qu'elle passe dans cet intervalle.
  - a) Calculer la vitesse classique de la particule à l'abscisse  $x$ . En déduire la densité de probabilité de présence  $\frac{dP_{cl}}{dx}$  de la particule.
  - b) Que vaut la probabilité de présence de la particule entre les abscisses 0 et  $L/4$  ?
2. On adopte maintenant un traitement quantique. L'énergie  $E$  de la particule correspond à un état stationnaire représenté par la fonction d'onde :
$$\psi_n(x, t) = A_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \exp\left(-i \frac{Et}{\hbar}\right), \text{ où } n \in \mathbb{N}^*.$$
  - a) La valeur de l'énergie est-elle quelconque ?
  - b) Que vaut la constante  $A_n$  ?
  - c) Que vaut la probabilité de présence de la particule entre les abscisses 0 et  $L/4$  ?
  - d) Que devient ce résultat dans la limite où  $n \gg 1$  ? Commenter.

---

<sup>1</sup> Ce résultat est une conséquence du théorème d'équipartition de l'énergie qui sera vu dans le cours de Physique statistique.

### Exercice 7 : Etalement d'un paquet d'onde.

On considère une particule quantique libre de masse  $m$ .

1. Dans le cas où elle est totalement délocalisée, quelle est sa relation de dispersion ?
2. On suppose maintenant que l'état de la particule est représenté par un paquet d'ondes formé d'ondes planes progressives dont les vecteurs d'onde sont distribués autour d'une valeur moyenne  $k_0$  avec une dispersion  $\Delta k$ , qui détermine l'extension spatiale initiale  $\Delta x_0$  du paquet d'onde à l'instant  $t = 0$ . On note  $\omega_0$  la pulsation moyenne associée à  $k_0$ .
  - a) Calculer la dispersion de la vitesse de groupe  $\Delta v_g$  correspondant à  $\Delta k$ . L'exprimer en fonction de  $\hbar$ ,  $m$  et  $\Delta x_0$ .
  - b) Que vaut la largeur du paquet d'onde à un instant  $t > 0$  ? A quel instant  $t_1$  sa largeur a-t-elle doublé ?
  - c) Calculer  $t_1$  pour :
    - Un électron initialement confiné dans un atome ;
    - Une microgouttelette d'eau de rayon  $10 \mu\text{m}$ .

Conclure.

### Exercice 8 : Fil quantique

On étudie ici la conduction électronique dans un fil quantique : il s'agit d'un matériau dans lequel les électrons peuvent se déplacer d'une extrémité à l'autre. Sa géométrie est celle d'un parallélépipède de section carrée, de côté  $a$ , et de longueur  $\ell \gg a$  (typiquement,  $a$  est de l'ordre du nm alors que  $\ell$  est de l'ordre du  $\mu\text{m}$ , d'où l'appellation « fil »). Pour ces raisons géométriques, il existe un fort confinement latéral des électrons, qui ne leur laisse la possibilité de se déplacer que selon l'axe ( $Ox$ ) du fil.

Les électrons sont donc traités comme des particules quantiques de masse  $m$ , libres de se mouvoir selon l'axe ( $Ox$ ) du fil.

La partie spatiale de la fonction d'onde qui représente un état stationnaire d'un électron d'énergie  $E$  s'écrit sous la forme suivante :  $\varphi(x) = A \exp(ikx)$ .

1.
  - a) Commenter la forme choisie pour  $\varphi(x)$ .
  - b) Déterminer la constante  $A$  et calculer l'énergie  $E$  d'un électron.
  - c) Que vaut la vitesse  $v_x$  de déplacement d'un électron ?
2.
  - a) Calculer la densité de probabilité de présence  $\frac{dP}{dx}$  d'un électron. Commenter.
  - b) On admet que la probabilité de présence entre  $x$  et  $x + dx$  d'un électron **dont le**

$$\text{vecteur d'onde } k \text{ est compris entre } k \text{ et } k + dk \text{ est : } dP_k(x) = \left(\frac{dP}{dx}\right) \frac{\ell}{\pi} dx \cdot dk .$$

Montrer que la contribution au courant électrique qui parcourt le fil dans le sens des  $x$  croissants, d'un électron dont le vecteur d'onde  $k$  est compris entre  $k$  et  $k + dk$  est :

$$dI = -\frac{ev_x}{\pi} dk.$$

3. Un fil quantique est disposé entre deux étaux soumis à une différence de potentiel  $U$ . Dans le métal 1, du côté  $x \leq 0$ , les électrons de conduction peuvent prendre toutes les énergies possibles jusqu'à une valeur maximale notée  $E_1$ . De même, dans le métal 2 ( $x \geq \ell$ ), les

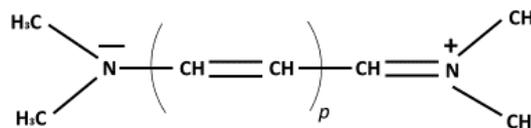
électrons peuvent prendre toutes les énergies possibles jusqu'à une valeur maximale notée  $E_2$ .  $E_1$  et  $E_2$  sont liées par la relation :  $E_2 = E_1 - eU$ .

Un électron du métal 1 dont l'énergie est comprise entre  $E_1$  et  $E_2$  peut transiter vers le métal 2 via le fil quantique. Cet électron a un vecteur d'onde  $k$  compris entre  $k_1$  et  $k_2$ , dont on déterminera les valeurs.

Pouvez-vous calculer la résistance du fil quantique ? Commenter. La calculer numériquement.

### Exercice 9 : Colorants organiques et modèle de Kuhn

En 1949, Hans Kuhn proposa, pour calculer les propriétés électroniques d'une molécule présentant des liaisons conjuguées, d'oublier le squelette d'atomes de carbone, d'azote et d'hydrogène, et d'attribuer leurs propriétés optiques dans le domaine visible aux seuls électrons  $\pi$  (c'est-à-dire : délocalisés). Le but du modèle est aussi de prédire la couleur de tel ou tel colorant. Dans un modèle simple, Kuhn propose de considérer que les  $N$  électrons  $\pi$  sont prisonniers dans un puits de potentiel infiniment profond, de longueur  $L$ .



1. La molécule représentée ci-dessus appartient à la famille des cyanines symétriques. Elle présente  $p$  doubles liaisons carbone – carbone. Les électrons  $\pi$  de cette molécule correspondent à **un** doublet par **double** liaison carbone – carbone ou carbone – azote, ainsi qu'aux doublets non liants des atomes d'azote.

Quel est, en fonction de  $p$ , le nombre  $N$  d'électrons délocalisés ?

2. Donner les valeurs des niveaux d'énergie  $E_n$  possibles pour les électrons délocalisés.
3. On admet que les électrons  $\pi$  se répartissent sur les différents niveaux d'énergie en respectant la règle de Hund et le principe de Pauli. Quel est le plus haut niveau d'énergie occupé ? Le plus bas niveau vacant ?
4. Quelle est la longueur d'onde du rayonnement électromagnétique absorbé par une telle molécule ?
5. Pour la famille des cyanines symétriques, les résultats expérimentaux donnent les raies d'absorption ainsi que les colorations suivantes (pour des colorants en solution dans  $\text{CH}_2\text{Cl}_2$ ) :

$p$	1	2	3	4	5
$\lambda$ (nm)	313	416	519	625	735
couleur	Incolore	Jaune	Rouge	Bleu	Vert

On note  $\ell$  la longueur moyenne d'une liaison (simple ou double) carbone – carbone ou carbone – azote. Dans son modèle, Kuhn propose :  $L = N\ell$ . On donne  $\ell = 0,139$  nm. Le modèle de Kuhn vous paraît-il satisfaisant ? Commenter les colorations obtenues.

### Exercice 10 : Courant tunnel

Un faisceau d'électrons, d'intensité  $I = 0,1$  mA est envoyé sur une barrière de potentiel de largeur  $a = 1,0$  nm et de hauteur  $V_0 = 2,0$  eV. L'énergie cinétique d'un électron incident vaut  $E = 1,0$  eV.

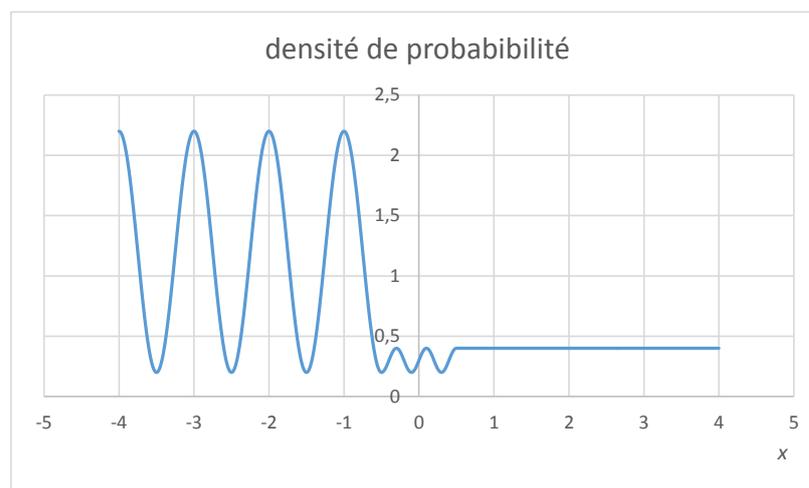
On donne le coefficient de transmission du courant de probabilité d'une telle barrière, sans approximation :  $T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(qa)}$ , où  $q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$ .

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(qa)}, \text{ où } q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}.$$

1. Interpréter physiquement le paramètre  $q$ . Peut-on se placer dans l'approximation de la barrière épaisse ?
2. Donner une forme approchée du coefficient de transmission  $T$  et l'interpréter.
3. Calculer l'intensité du courant tunnel récupéré de l'autre côté de la barrière.
4. Qu'obtiendrait-on si on remplaçait les électrons par des protons, toutes choses égales par ailleurs ?

### Exercice 11 : A la recherche du potentiel perdu...

Un faisceau de particules quantiques de masse  $m$  et d'énergie  $E$  provient de  $-\infty$  ; les particules se déplacent parallèlement à l'axe  $Ox$ . Chaque particule est soumise à un champ de force qui dérive d'une énergie potentielle  $V(x)$  dont le profil est inconnu. On admet que cette énergie s'annule quand  $x \rightarrow \pm\infty$ . On a représenté sur le graphe suivant la densité de probabilité de présence  $\frac{dP}{dx} = |\psi|^2$  en fonction de  $x$ .



1. L'état d'une particule quantique est-il un état lié ou un état de diffusion ?
2. Quelle interprétation peut-on donner aux oscillations de la densité de probabilité pour  $x \leq -\frac{a}{2}$  ? Le même comportement est-il observable en mécanique classique ?
3. Pourquoi observe-t-on aussi des oscillations dans la zone centrale  $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$  ? Interpréter l'allure constatée dans le domaine  $x \geq \frac{a}{2}$ .

- On suppose que l'énergie potentielle  $V(x)$  est constante par morceaux. Déterminer son allure en fonction de  $x$ .
- La fonction d'onde associée à cet état stationnaire d'énergie s'écrit :  

$$\psi(x, t) = \varphi(x) \exp\left(-i \frac{Et}{\hbar}\right)$$
 Dans la mesure du possible, proposer une expression pour  $\varphi(x)$  dans chacun des trois domaines  $x \leq -\frac{a}{2}$ ,  $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$  et  $x \geq \frac{a}{2}$ . Quelles conditions de raccordement la fonction  $\varphi$  doit-elle vérifier en  $x = \pm \frac{a}{2}$  ?

### Exercice 12 : Fusion thermonucléaire au cœur du Soleil

On envisage la fusion thermonucléaire de deux noyaux d'hydrogène au cœur du Soleil. On modélise le processus par la collision entre un noyau incident d'énergie  $E$  avec un autre noyau supposé au repos. Le noyau incident doit traverser par effet tunnel une barrière de potentiel due à la répulsion électrostatique entre les deux noyaux.

On admet que ce problème (problème dit « à deux corps ») doit être traité en considérant une unique particule de masse  $\frac{m_p}{2}$  où  $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27}$  kg est la masse d'un proton, soumise à l'interaction électrostatique régnant entre les deux noyaux.

Pour obtenir un ordre de grandeur de la probabilité  $T$  de traversée de la barrière de potentiel par effet

tunnel, on adopte la loi de Gamow pour la radioactivité  $\alpha$  :  $\ln T = a - \frac{b}{\sqrt{E}}$  où  $\begin{cases} a = 2R \frac{\sqrt{Vm_\alpha}}{\hbar} \\ b = \frac{\pi RV}{\hbar} \sqrt{2m_\alpha} \end{cases}$  avec

$$V = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

- Adapter la loi de Gamow au problème posé.
- Au centre du Soleil, la température est estimée à  $T_S = 1,5 \cdot 10^7$  K.
  - Comparer l'énergie  $E$  du noyau incident et la hauteur de la barrière de potentiel. Commenter.
  - Estimer la probabilité de fusion des deux noyaux. Combien de collisions faut-il pour réaliser la fusion ? Quel est le rôle de la température ?

### Exercice 13 : Molécule de benzène

La molécule de benzène (de formule brute  $C_6H_6$ ) est constituée d'un squelette carboné de forme hexagonale, et présente 6 électrons délocalisés (appelés « électrons  $\pi$  ») libres de se mouvoir le long de la chaîne d'atomes de carbone : grossièrement, cela revient à considérer que ces électrons se déplacent le long d'un cercle de rayon  $a$ . On adopte un modèle unidimensionnel en supposant que chaque électron  $\pi$  est une particule quantique astreinte à se déplacer le long du segment  $0 \leq x \leq 2\pi a$ , dans un potentiel nul. Un état stationnaire de cette particule est représenté par la fonction d'onde  $\psi(x, t) = \varphi(x) \exp\left(-i \frac{Et}{\hbar}\right)$ .

- On cherche une fonction d'onde propre sous la forme  $\varphi(x) = A \exp(ikx)$ . Peut-on choisir  $A$  réel ? Déterminer complètement  $\varphi(x)$  et la normaliser.
- Quelle condition aux limites proposez-vous ?
- Déterminer les niveaux d'énergie de la molécule de benzène. Ces niveaux sont-ils dégénérés ?
- Représenter les différents états quantiques de la molécule sur un diagramme énergétique.

- Remplir le diagramme précédent en y plaçant les 6 électrons  $\pi$  (qui suivent les règles de Hund et de Pauli).
- Le benzène présente une bande d'absorption pour la longueur d'onde  $\lambda = 255$  nm. Proposer une valeur numérique de  $a$ . La comparer à la valeur tabulée de la longueur de la liaison C – C : 142 pm.

### Exercice 14 : Etat non stationnaire dans un puits infini

On étudie l'évolution d'une particule quantique, de masse  $m$ , piégée dans un puits de potentiel infini de largeur  $a$  :  $V(x) = 0$  pour  $0 < x < a$  et  $V(x) \rightarrow \infty$  en dehors de cet intervalle.

- Quels sont les niveaux d'énergie  $E_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) ainsi que les fonctions d'ondes propres correspondantes  $\varphi_n(x)$  dans le puits de potentiel ?
- On pose  $E_1 = \hbar\omega_0$ . Exprimer les niveaux d'énergie  $E_n$  en fonction de  $\omega_0$ .
- On considère l'état décrit par la fonction d'onde  $\psi_n(x, t)$  vérifiant la condition initiale  $\psi_n(x, 0) = \varphi_n(x)$ . Déterminer  $\psi_n(x, t)$  pour  $t > 0$ .
- On considère maintenant l'état décrit par la fonction d'onde  $\psi(x, t)$  vérifiant la condition initiale  $\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x))$ .
  - Déterminer l'expression de  $\psi(x, t)$  pour  $t > 0$ .
  - On définit les deux états suivants : 
$$\begin{cases} \varphi_d(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) \\ \varphi_g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) \end{cases}$$
 Exprimer  $\psi(x, t)$  en fonction de  $\varphi_d(x)$  et  $\varphi_g(x)$ . En déduire la densité de probabilité de présence  $P(x, t)$ . Que peut-on dire de son évolution ?
  - Représenter l'allure de  $P(x, t)$  en fonction de  $x$  à différents instants bien choisis.

### Exercice 15 : Courant de probabilité

A une particule quantique de masse  $m$ , décrite par la fonction d'onde  $\psi(x, t)$ , on associe la grandeur :

$$j = \frac{i\hbar}{2m} \left( \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right).$$

- Établir l'équation  $\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} = 0$ . En déduire le sens physique de la grandeur  $j$ .
- On envisage une particule se déplaçant vers les  $x$  croissants, avec une énergie  $E$  et une quantité de mouvement  $p$  parfaitement déterminées, dans un potentiel  $V(x) = V_0$  constant (on suppose  $E > V_0$ ). Expliciter  $\psi(x, t)$  et  $j(x, t)$ . Quel est le lien entre  $j(x, t)$  et  $|\psi(x, t)|^2$  ? Interpréter.
- On envisage une particule se déplaçant dans un potentiel  $V(x) = V_0$  constant dans un domaine s'étendant jusqu'en  $x \rightarrow +\infty$ , avec une énergie  $E < V_0$ . Expliciter  $\psi(x, t)$  et  $j(x, t)$ . Commenter.
- On envisage une particule se déplaçant dans un potentiel  $V(x) = V_0$  constant dans un domaine borné s'étendant entre  $x = 0$  et  $x = L$  avec une énergie  $E < V_0$ .
  - Montrer que dans l'intervalle  $[0, L]$ ,  $\psi(x, t)$  est la somme de deux ondes  $\psi_1(x, t)$  amplifiée dans le sens des  $x$  croissants, et  $\psi_2(x, t)$  amplifiée dans le sens des  $x$  décroissants.
  - Montrer que le courant de probabilité résulte de l'interférence de  $\psi_1(x, t)$  et  $\psi_2(x, t)$ . Commenter en lien avec l'effet tunnel.

### Exercice 16 : Puits de potentiel semi-infini. Stabilité du deutéron.

On cherche à modéliser dans cet exercice l'interaction nucléaire entre un noyau d'hydrogène (proton) et un neutron, pour estimer la stabilité du deutéron (noyau de deutérium).

Pour cela, on cherche les états stationnaires d'un quanton de masse  $m$  d'énergie potentielle :

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < a \\ V_0 > 0 & \text{si } x > a \end{cases}. \text{ On note } E \text{ l'énergie de l'état stationnaire recherché, et on pose : } k \cong \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar},$$
$$k_0 \cong \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} \text{ et } K \cong \sqrt{k_0^2 - k^2}.$$

1. En quoi ce modèle est-il a priori pertinent pour décrire l'interaction neutron – proton ?  $k$  est-il toujours réel ?
2. On suppose dans un premier temps que  $E > V_0$ . Déterminer les états stationnaires vérifiant cette condition. Comment les nomme-t-on et pourquoi ? Que peut-on dire du spectre des énergies de ces états propres ?
3. On suppose dorénavant que  $E < V_0$ . Déterminer la forme générale des états stationnaires correspondants. Comment les nomme-t-on et pourquoi ?
4. Montrer que ces états stationnaires doivent vérifier l'équation :  $\tan u = -\frac{u}{\sqrt{u_0^2 - u^2}}$  où  $u \cong ka$   
et  $u_0 \cong k_0 a$ .

5. En raisonnant graphiquement, répondre aux questions suivantes :

- a) Y a-t-il quantification des niveaux d'énergie des états stationnaires vérifiant  $E < V_0$  ? Cela était-il prévisible ?
- b) Y a-t-il toujours des solutions ? A quelle condition sur le potentiel  $V_0$  existe-t-il au moins une solution ?
- c) A quelle condition sur  $u_0$  existe-t-il  $N$  solutions ?
- d) Pour un puits très profond, donner l'expression approchée des premiers niveaux d'énergie. Commenter.
- e) Pour un puits peu profond au contraire, quelle est l'expression approchée des niveaux d'énergie ?

6. Dans le cas de l'interaction proton – deutéron, on donne les valeurs numériques suivantes :  $V_0 = 21 \text{ MeV}$  ;  $a = 2,8 \text{ fm}$  ;  $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  ;  $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ . Compte tenu de la proximité des valeurs des masses du proton et du neutron, on admet qu'il est nécessaire de traiter ce problème comme un problème à deux corps, ce qui revient à considérer que la masse du quanton est donnée par la masse réduite  $\mu$  définie par :  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_n}$ .

Combien y a-t-il d'états stationnaires du deutéron d'énergie  $E < V_0$  ? Calculer numériquement l'énergie du deutéron. Que pensez-vous de la stabilité du deutéron ? Commenter le fait que l'abondance du deutérium dans la nature est de l'ordre de 0,015% par rapport à l'hydrogène.

### Exercice 17 : Moutons quantiques au bord d'un précipice

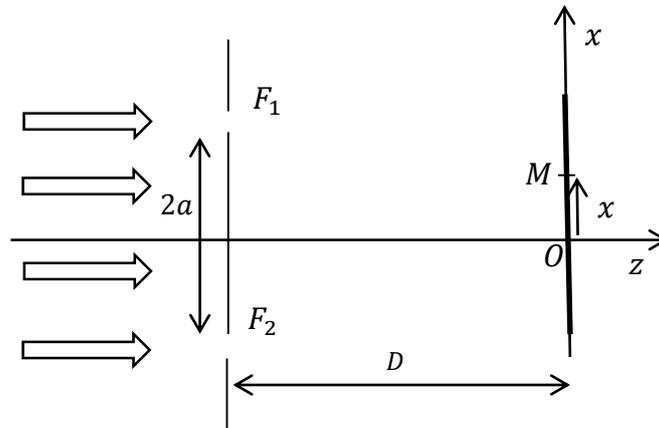
On considère un faisceau monochromatique de quantons émis par une source située en  $x = -\infty$ . Ces quantons abordent une « falaise de potentiel » définie par :  $V(x) = \begin{cases} V_0 > 0 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ ,

Déterminer les coefficients de réflexion et transmission de la falaise.

Examiner en particulier le cas  $E \gtrsim V_0$ . Commenter.

### Exercice 18 : Observation des franges d'Young et inégalité de Heisenberg

Soit le dispositif interférentiel d'Young utilisé avec une source ponctuelle  $S$  placée sur la médiatrice des deux fentes  $F_1$  et  $F_2$  distantes de  $2a$ . La source  $S$  émet des quantons un à un et tous les quantons sont émis avec la même énergie. La distance entre le plan des fentes et l'écran, qui lui est parallèle, est  $D \gg a$ . L'observation est effectuée en un point  $M$  quelconque de l'écran repéré par  $x \ll D$ .



1. En raisonnant sur un quanton de longueur d'onde  $\lambda$  traversant un diaphragme de diamètre  $\varphi$ , montrer que le quanton doit subir une diffraction, puis calculer un ordre de grandeur de l'angle caractéristique de cette diffraction.
2. On montre que la différence de marche  $\delta$  au point  $M$  entre les ondes venant de  $F_1$  et  $F_2$  s'écrit  $\delta = \frac{2ax}{D}$ . En déduire la valeur de l'interfrange.

Pour savoir par quelle fente passe chaque quanton, on mesure le déplacement de l'écran suivant  $(Ox)$  (qui est libre de se translater selon l'axe  $(Ox)$ ) induit par chaque impact de quanton. En effet, l'écran gagne la composante de la quantité de mouvement suivant  $(Ox)$  qu'avait le quanton absorbé.

3. Exprimer la quantité de mouvement  $p_{1x}$  selon  $(Ox)$  d'un quanton parvenant en  $M$  après être passé par la fente  $F_1$  en fonction de la valeur  $p$  de sa quantité de mouvement. Faire de même pour le cas d'un quanton passant par la fente  $F_2$ .  
En déduire que l'on sait de quelle fente provient le quanton seulement si l'indétermination sur la quantité de mouvement de l'écran est très inférieure à une valeur que l'on précisera.
4. Est-il alors possible d'observer des interférences sur l'écran ? Quel principe physique cette expérience de pensée illustre-t-elle ?