

Physique statistique

Exercice 1 : Système à trois niveaux d'énergie

On considère un système de N particules identiques indépendantes et discernables pouvant exister dans 3 états quantiques non dégénérés d'énergies $-\epsilon$, 0 et $+\epsilon$. Le système est en équilibre avec un thermostat de température T .

1. Quelle est l'énergie moyenne U du système ? Examiner les limites haute et basse température.
2. Prévoir sans calcul la valeur de la capacité thermique C_V du système à haute et basse température. Pouvez-vous en déduire l'allure des variations de C_V en fonction de T ?

Exercice 2 : Inversion de population

Le principe fondamental d'un LASER repose sur l'émission stimulée de photons lors de la transition atomique du niveau d'énergie $E_2 = \epsilon$ vers le niveau d'énergie $E_1 = 0$ avec $\epsilon > 0$: à partir d'un photon d'énergie ϵ , on obtient deux photons ayant exactement les mêmes caractéristiques (même fréquence, même phase, même polarisation – on parle alors de photons « jumeaux »). On considère ici un ensemble de N atomes pouvant exister dans l'un ou l'autre de ces deux états d'énergie $E_1 = 0$ ou $E_2 = \epsilon$.

1. Expliquer en évaluant numériquement le rapport $\frac{N_2}{N_1}$ des populations des deux niveaux dans quel état on est susceptible de trouver le système à l'équilibre thermodynamique à la température T .
2. Les deux phénomènes d'émission stimulée et d'absorption sont en fait en compétition et sont

gouvernés par les deux équations d'Einstein :
$$\begin{cases} \left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{abs} = -\alpha N_1 \\ \left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{spont} = +\alpha N_2 \end{cases} \text{ où } \alpha > 0. \text{ Expliquer en}$$

quoi le fonctionnement d'un LASER doit reposer sur une « inversion de population ». Un LASER peut-il fonctionner à l'équilibre thermodynamique ?

Exercice 3 : Expérience historique de Jean Perrin

Dans son livre *Les atomes*, publié en 1913, Jean Perrin décrit les expériences qui lui ont permis de mesurer le nombre d'Avogadro. Au terme d'une préparation minutieusement décrite dans cet ouvrage fondateur, l'auteur obtient une suspension de grains de « gomme-gutte » sphériques dans de l'eau ; les grains sont sphériques et ont le même rayon $a = 0,21 \mu\text{m}$. Il observe au microscope la répartition des grains dans une cuve verticale de $100 \mu\text{m}$ de profondeur. Le principe de l'expérience repose sur le comptage des grains à différentes altitudes. Perrin mesure la concentration en grains en quatre plans horizontaux équidistants d'altitudes (comptées à partir du fond de la cuve) $5, 35, 65$ et $95 \mu\text{m}$. Il obtient des concentrations proportionnelles respectivement aux nombres : $100, 47, 23$ et 12 . La densité de la gomme-gutte est de $1,19$.

En supposant que la température est de 20°C (valeur curieusement non précisée par l'auteur), évaluer le nombre d'Avogadro.

Exercice 4 : Paramagnétisme de Brillouin à $2J + 1$ niveaux

Considérons une assemblée de N atomes situés aux nœuds d'un réseau cristallin. Les atomes possèdent un moment magnétique permanent et sont supposés sans interaction. En présence d'un champ magnétique extérieur $\vec{B} = B\vec{u}_z$, la projection m_z du moment magnétique d'un atome sur la direction du champ est quantifiée et ne peut prendre qu'une valeur de l'ensemble $\{-J\mu, \dots, +J\mu\}$ où J est entier ou demi-entier (positif, non nul). Ainsi, si $J = \frac{1}{2}$, on est ramené au cas du paramagnétisme à 2 niveaux (m_z peut prendre les valeurs $-\frac{\mu}{2}$ et $+\frac{\mu}{2}$); si $J = 1$, m_z peut prendre les valeurs $-\mu, 0, +\mu$.

1. Quels sont les niveaux d'énergie que peut prendre un atome interagissant avec le champ \vec{B} ?
2. Calculer l'énergie moyenne U du système, ainsi que l'aimantation $\langle M \rangle$, moment magnétique moyen du système.
3. Examiner et commenter les limites haute et basse température.
4. Calculer la susceptibilité magnétique χ du milieu, définie par : $\chi \hat{=} \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial B}$. Retrouve-t-on la loi de Curie : $\chi \propto \frac{1}{T}$?
Donnée : $\coth x \sim \frac{1}{x} + \frac{x}{3}$ pour $x \rightarrow 0$.
5. Estimer la susceptibilité d'un cristal paramagnétique à température ordinaire, sachant que $\mu \approx 2.10^{-23} \text{ J.T}^{-1}$.

Exercice 5 : Capacité thermique des solides à basse température (modèle d'Einstein)

La loi de Dulong et Petit donnant la capacité thermique molaire d'un solide $C_V \approx 3R$ n'est valable qu'à température suffisamment élevée, puisqu'elle repose sur un traitement classique (théorème d'équipartition de l'énergie). A basse température, les valeurs expérimentales sont en désaccord violent avec ladite loi. Nous allons ici envisager un modèle très simple, mais quantique, dû à Einstein (1907).

Le cristal, constitué de N atomes, est assimilé à un ensemble de $3N$ oscillateurs harmoniques unidimensionnels indépendants (le facteur 3 traduisant le fait que chaque atome est susceptible d'osciller autour de sa position d'équilibre suivant les 3 directions de l'espace). Classiquement, l'énergie d'un de ces oscillateurs harmoniques s'écrit : $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. D'un point de vue quantique, les niveaux d'énergie de chaque oscillateur sont quantifiés et valent : $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'énergie moyenne U (ou énergie interne) du cristal s'écrit :

$$U = N \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)$$

$$\text{Donnée : } \sum_0^{+\infty} n \exp(-an) = \frac{1}{4 \sinh^2\left(\frac{a}{2}\right)} \text{ pour } a > 0.$$

2. Calculer la capacité thermique molaire du solide.
Donnée : $\coth' x = -\frac{1}{\sinh^2 x}$.
3. Examiner et commenter les limites haute et basse température.
4. Tracer l'allure de la courbe $C_{V,m}(T)$

Exercice 6 : Capacité thermique du dihydrogène gazeux

Le but de cet exercice est d'étudier la dépendance en température de la capacité thermique C_V du dihydrogène gazeux.

1. Degrés de liberté de translation

On assimile les mouvements de translation d'une molécule de H_2 gazeux à ceux d'une particule quantique de masse $m = 2m_p = 3,35 \cdot 10^{-27}$ kg dans une boîte unidimensionnelle de longueur L (c'est-à-dire un puits de potentiel infini de largeur L).

- Donner l'expression, en ordre de grandeur de l'écart Δ_{trans} entre deux niveaux d'énergie de translation d'une molécule H_2 .
- Evaluer l'ordre de grandeur de la température $\Theta_{trans} \cong \frac{\Delta_{trans}}{k_B}$. Conclure quant à l'utilisation du théorème d'équipartition de l'énergie pour les degrés de liberté de translation.

2. Degrés de liberté de rotation

La distance entre les deux noyaux d'hydrogène de la molécule H_2 vaut $a = 74,1$ pm.

- Justifier que le moment d'inertie de la molécule par rapport à un axe passant par son centre de masse, et perpendiculaire à l'axe de la molécule vaut $I \approx \frac{ma^2}{4}$. Le calculer numériquement.
- Que peut-on dire du moment d'inertie de la molécule par rapport à son axe ? Combien de degrés de liberté de rotation faut-il prendre en compte ?
- Justifier que l'énergie cinétique de rotation de la molécule s'écrit : $E_C = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I}$ où L désigne le module de son moment cinétique par rapport à son centre de masse.
- En mécanique quantique, l'expression précédente reste valide mais L est quantifié : $L^2 = \ell(\ell + 1)\hbar^2$ où $\ell \in \mathbb{N}$. Quel est le plus petit écart Δ_{rot} entre deux niveaux d'énergie de rotation de la molécule H_2 ?
- Calculer numériquement la température $\Theta_{rot} \cong \frac{\Delta_{rot}}{k_B}$.

3. Degrés de liberté de vibration

On s'intéresse maintenant aux mouvements de vibration de la molécule. On note r la distance entre les deux noyaux, qui n'est plus nécessairement égale à a . L'énergie potentielle de déformation de la molécule est modélisée par la formule empirique suivante :

$$E_p = E_0(1 + \exp(-2\alpha(r - a)) - 2 \exp(-\alpha(r - a))) \text{ où } E_0 = 7,72 \cdot 10^{-19} \text{ J et}$$

$\alpha = 2,00 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-1}$. L'énergie cinétique de vibration de la molécule vaut $E_C = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{4}\right) \dot{r}^2$ (c'est un problème « à deux corps »).

- Tracer l'allure de la courbe $E_p(r)$.
- On s'intéresse aux petites vibrations autour de la position d'équilibre $r_{\text{eq}} = a$. On a alors : $\alpha|r - a| \ll 1$. Donner l'expression et la valeur numérique de la constante k définie par $E_p \approx \frac{1}{2}k(r - a)^2$.
- Donner l'expression et la valeur numérique de la fréquence ν des vibrations de la molécule H_2 .

- f) En mécanique quantique, les niveaux d'énergie de vibration de la molécule sont donnés par : $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$ où $n \in \mathbb{N}$. Quel est le plus petit écart Δ_{vib} entre deux niveaux d'énergie de vibration de la molécule H_2 ?
- d) Calculer numériquement la température $\Theta_{vib} \hat{=} \frac{\Delta_{vib}}{k_B}$.
4. Estimer la capacité thermique molaire C_V du gaz dihydrogène aux températures suivantes : 10 K, 100 K, 1000 K et 10000 K.

Exercice 7 : enrichissement isotopique par ultracentrifugation

Une éprouvette cylindrique de rayon a et de hauteur h est remplie d'un gaz supposé parfait de masse molaire M . Ce cylindre est mis en rotation autour de son axe à la vitesse angulaire ω . On néglige la pesanteur, on suppose que le gaz atteint un état d'équilibre dans le référentiel du cylindre et que sa température T est uniforme.

- Soit $n(r)$ la densité volumique moléculaire à la distance r de l'axe. Exprimer le rapport $\frac{n(r)}{n(0)}$.
- Le dispositif précédent est à la base de la méthode d'enrichissement de l'uranium par ultracentrifugation. L'hexafluorure d'uranium UF_6 est introduit dans des cylindres de rayon $a = 20$ cm qui tournent autour de leur axe à 10000 tours par minute. La température est $T = 300$ K.
 - Calculer numériquement $\frac{n(a)}{n(0)}$ dans le cas de la molécule $^{238}UF_6$ de masse molaire 352 g.mol^{-1} , puis dans le cas de la molécule $^{235}UF_6$.
 - Dans la nature, la fraction molaire de l'isotope ^{235}U est égale à 0,72%, et l'opération d'enrichissement doit fournir un combustible contenant entre 3 et 5% de cet isotope. Calculer $\frac{x_{235}(0)}{x_{235}(a)}$ pour un cylindre. Commenter, sachant qu'une installation comporte entre 1000 et 10000 cylindres.

Exercice 8 : Mouvement brownien

Robert Brown, médecin britannique, observa en 1827 dans son microscope le mouvement chaotique de particules de pollen dans de l'eau : il découvrit ainsi ce qu'on appellerait plus tard « mouvement brownien ». Ce mouvement erratique fut interprété par Langevin en 1908 comme résultant des chocs incessants et aléatoires des molécules d'eau sur les particules « browniennes » de pollen, beaucoup plus grosses (leur taille est de l'ordre du micromètre).

On modélise ici ce mouvement en adoptant un modèle unidimensionnel, les particules browniennes se déplaçant le long de l'axe Ox . On repère la position d'une particule par son abscisse $x(t)$ autour de sa position initiale $x(0) = 0$.

On rend compte des chocs des molécules d'eau sur la particule brownienne étudiée de la manière suivante :

- L'action des molécules d'eau est traduite par une force $F(t)$ qui fluctue aléatoirement sur une échelle de temps beaucoup plus courte que la durée d'observation. Sa moyenne temporelle sur une durée intermédiaire entre ces deux échelles de temps est nulle : $\langle F(t) \rangle = 0$.

- D'autre part, l'action des molécules d'eau se traduit également par une force dissipative de frottement fluide $-f\dot{x}$ où f est une constante positive.

On note $\langle X \rangle$ la moyenne temporelle d'une grandeur $X(t)$ sur une durée intermédiaire entre le temps caractéristique des chocs et la durée d'observation. On admet enfin que $\langle \frac{dX}{dt} \rangle = \frac{d\langle X \rangle}{dt}$.

1. Ecrire l'équation du mouvement de la particule brownienne. C'est l'équation de Langevin.
2. On admet que $\langle xF \rangle = \langle x \rangle \langle F \rangle = 0$. Montrer que $m \frac{d\langle x\dot{x} \rangle}{dt} = m\langle \dot{x}^2 \rangle - f\langle x\dot{x} \rangle$.
3. Que vaut $\langle \dot{x}^2 \rangle$? On justifiera la réponse.
4. Exprimer $\langle x\dot{x} \rangle$ en fonction du temps, notamment.
5. En déduire « qu'aux temps longs » (expression que l'on précisera), $\langle x^2 \rangle \approx Dt$ où D est fonction de $k_B T$ et de f . Interpréter ce coefficient.
6. La particule brownienne est une sphère de rayon $a = 10 \mu\text{m}$, de densité 1,2. Le coefficient de frottement est donné par la loi de Stokes : $f = 6\pi\eta a$ où $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ est la viscosité de l'eau. Quelle est la distance moyenne parcourue par la particule brownienne en 1 s si la température vaut $T = 300 \text{ K}$? Quel est l'ordre de grandeur du temps caractéristique d'évolution de $x(t)$?

Exercice 9 : Ferromagnétisme dans le modèle du champ moyen de Weiss

Certains solides cristallins (comme le fer) sont susceptibles de présenter, en dessous d'une certaine température critique T_C (dite température de Curie (Pierre !)) une aimantation spontanée en l'absence de champ magnétique extérieur appliqué : il s'agit alors d'aimants permanents.

Pour rendre compte de ce phénomène, nous reprenons le modèle des spins à 2 niveaux déjà rencontré à propos du paramagnétisme (c'est-à-dire qu'une composante m_z du moment magnétique d'un atome ne peut prendre que l'une des deux valeurs $+\mu$ ou $-\mu$). Mais les propriétés ferromagnétiques étant dues à une interaction entre les spins, qui tend à les aligner, il nous faut trouver le moyen d'en rendre compte. Le problème du ferromagnétisme est un problème d'une très grande complexité (c'est ce qu'on appelle le problème de Heisenberg, non résolu à ce jour !).

Nous allons donc adopter un modèle dit du « champ moyen » dû au physicien français Pierre Weiss (1907) dans lequel on suppose que chaque moment magnétique atomique est plongé dans un champ total $\vec{B} = (B_{ext} + \lambda\langle M \rangle)\vec{u}_z$ où λ est une constante positive (dimensionnée !) et $\langle M \rangle$ désigne l'aimantation du solide (constitué de N atomes), c'est-à-dire son moment magnétique moyen. La contribution supplémentaire $\lambda\langle M \rangle$ rend compte des interactions entre spins.

Le cristal est supposé en équilibre avec un thermostat de température T .

1. Calculer le moment magnétique moyen $\langle m_z \rangle$ d'un atome, et en déduire l'équation « d'auto-cohérence » vérifiée par l'aimantation : $\langle M \rangle = N\mu \tanh\left(\frac{\mu(B_{ext} + \lambda\langle M \rangle)}{k_B T}\right)$.
2. On se place ici à champ extérieur nul : $B_{ext} = 0$.
 - a) Montrer graphiquement qu'en dessous d'une certaine température critique T_C à déterminer, le cristal peut présenter une aimantation spontanée (c'est-à-dire sans champ extérieur) non nulle.
 - b) Que devient l'aimantation spontanée quand $T \rightarrow T_C^-$? Déterminer l'expression approchée de $\langle M \rangle$ au voisinage de T_C^- .

Donnée : $\tanh x \sim x - \frac{x^3}{3}$ quand $x \rightarrow 0$.

- c) Que devient l'aimantation spontanée au voisinage du zéro absolu ?
- d) En déduire l'allure de la courbe $\langle M \rangle(T)$.
- e) Pour le fer, $T_C = 1043$ K. On donne $\mu = 0,93 \cdot 10^{-23}$ J.T⁻¹. Montrer numériquement que l'interaction responsable de la tendance à l'alignement des spins ne peut être d'origine magnétique. En fait, c'est une interaction coulombienne, de nature purement quantique (interaction dite « d'échange »).
3. On applique maintenant un champ extérieur : $B_{ext} \neq 0$, et on suppose que $T > T_C$. Puisqu'on est à « haute » température, l'ordre ferromagnétique est en grande partie détruit. Dans ces conditions, il est légitime de penser que $B_{ext} + \lambda \langle M \rangle$ est au plus de l'ordre du Tesla.
- a) Quelle approximation vous paraît-il raisonnable d'envisager dans l'équation d'auto-cohérence ? On attend un argument numérique.
- b) En déduire l'expression de l'aimantation $\langle M \rangle$ en fonction du champ extérieur B_{ext} .
- c) Que vaut la susceptibilité magnétique du milieu définie par $\chi \hat{=} \lim_{B_{ext} \rightarrow 0} \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial B_{ext}}$? Comment peut-on qualifier le comportement du milieu ?

Exercice 10 : Le gaz parfait classique

Le but de cet exercice est de retrouver un certain nombre des propriétés macroscopiques du modèle du gaz parfait classique à partir d'arguments fondés sur la physique statistique. Le système étudié est donc constitué de N particules identiques, indépendantes (c'est le modèle du gaz parfait !) et indiscernables (car c'est un gaz). Il est supposé contenu dans une enceinte de volume V et est en équilibre avec un thermostat de température T . Enfin, le gaz est traité de manière classique, et non quantique.

Pour atteindre le but que nous nous sommes fixé, il va d'abord falloir procéder à quelques adaptations des résultats du cours. La détermination du coefficient de normalisation (ou fonction de partition) Z du système des N particules doit se faire comme suit :

- (i) Traitement **classique** pour *une* particule :

$$z = \sum_{\rho} \exp(-\beta \epsilon_{\rho}) \rightarrow z = \frac{1}{h^3} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} d^3 \vec{r} d^3 \vec{p} \exp(-\beta \epsilon(\vec{r}, \vec{p})) \quad \text{où } \beta \hat{=} \frac{1}{k_B T};$$

- (ii) N particules identiques indépendantes **indiscernables** :

$$Z = z^N \rightarrow Z = \frac{1}{N!} z^N$$

1. Montrer que la fonction de partition z d'une particule du gaz parfait s'écrit : $z = \frac{V}{\lambda_T^3}$ où

$$\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}. \text{ Justifier l'appellation de « longueur d'onde thermique » pour cette grandeur.}$$

$$\text{Donnée : } \int_0^{+\infty} x^2 \exp(-ax^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}.$$

2. On rappelle le lien entre l'énergie moyenne U et la fonction de partition Z d'un système en équilibre avec un thermostat : $U = - \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_{V,N}$.

Calculer l'énergie interne (ou énergie moyenne) du gaz. Commenter le résultat obtenu.

3. L'expression statistique de la pression du gaz se déduit également de la fonction de partition :

$$p = k_B T \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_{T,N}.$$

Déterminer l'équation d'état du gaz. Commenter.

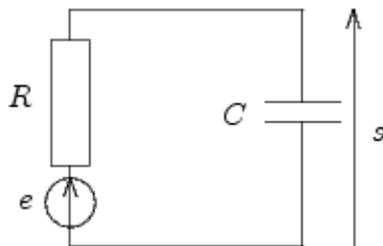
Exercice 11 : Bruit thermique Johnson – Nyquist dans une résistance

Le **bruit thermique**, également nommé *bruit de résistance*, ou *bruit Johnson* ou *bruit de Johnson-Nyquist* est le bruit généré par l'agitation thermique des porteurs de charges, c'est-à-dire des électrons dans une résistance électrique en équilibre thermique. Ce phénomène existe indépendamment de toute tension appliquée. Un courant de bruit, de valeur moyenne nulle, prend donc naissance à l'intérieur du conducteur. C'est l'interaction entre le "gaz d'électrons libres" assurant la conduction et le réseau fixe qui assure la mise à l'équilibre thermique du système. Cette interaction expliquant microscopiquement la *résistance* du conducteur, il est donc naturel que l'on trouve une relation liant les fluctuations du courant (ou de la tension), la résistance et la température dans ce conducteur. Ce phénomène fut étudié expérimentalement par J. B. JOHNSON en 1928. H. NYQUIST en publia l'analyse thermodynamique en 1928 également.

On se propose ici de déterminer la tension efficace de bruit thermique aux bornes d'une résistance à la température T , la tension efficace étant mesurée par un voltmètre de bande passante Δf . A cette fin, on modélise le bruit thermique par un générateur idéal de tension délivrant une tension totalement aléatoire $e(t)$, et on assimile ce signal à un « bruit blanc » : son spectre est quasiment constant en fréquence.

Pour un signal non périodique $e(t)$ tel qu'un bruit aléatoire, la valeur efficace du signal E_{eff} est définie par $E_{eff}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^2(t) dt$. Pour un tel signal, on introduit sa densité spectrale de puissance $K(f)$ définie par la relation : $E_{eff}^2 = \int_0^\infty K(f) df$ ¹. Dans le cas d'un bruit blanc, la densité spectrale est constante sur la gamme de fréquences envisagée : $K(f) = E_0^2$.

On considère le circuit suivant, thermalisé à la température T . Les fluctuations de la répartition des charges dans le circuit dues à l'agitation thermique et modélisées par le générateur de bruit blanc $e(t)$ se traduisent au niveau des armatures du condensateur par une charge également aléatoire $q(t)$.



1. On isole par la pensée la fréquence f . Déterminer sa contribution $\underline{s}(f)$ au signal de sortie.
2. En déduire que l'énergie moyenne (temporelle) stockée dans le condensateur vaut :

$$\overline{U_C} = \frac{E_0^2}{8R}$$
3. Le bruit aléatoire est de plus supposé « ergodique » : effectuer une mesure sur un temps long et répéter une mesure ponctuelle un très grand nombre de fois sont deux opérations équivalentes. La moyenne temporelle est donc confondue avec la moyenne d'ensemble (ou statistique).
 Que vaut l'énergie moyenne $\langle U_C \rangle$ stockée dans le condensateur, au sens statistique ?
4. En déduire la formule de Nyquist : $E_{eff}^2 = 4k_B T \cdot R \cdot \Delta f$, où Δf désigne la bande passante du circuit ou de l'instrument de mesure.
5. Calculer la tension efficace de bruit thermique dans une résistance de 100 M Ω dans un circuit de 100 MHz de bande passante. Dans quelles circonstances faut-il s'affranchir de ce bruit ?

¹ Cette relation ne fait qu'étendre le théorème de Parseval, consistant à sommer les contributions des différentes fréquences pour obtenir la puissance totale. $K(f)$ s'exprime donc en $V \cdot Hz^{-1}$.