Lycée GUSTAVE EIFFEL Bordeaux Aquitaine

PSI*

Calculus pour la physique

0. Calcul mental : applications numériques sans calculatrice (CCMP, X-ENS, CCINP[1])

Question naïve : comment obtenir des points (nombreux !) lorsqu'on demande une A.N. sans calculatrice ?

- **Unité** indispensable (SI ne rapporte aucun point !)
- Résultat numérique à exprimer sous la forme d'un **entier** ou d'un nombre **décimal**, assorti éventuellement de la **puissance de 10** convenable (ex. : $\frac{\pi}{\sqrt{2}}\ \mathrm{V}$ ne rapporte aucun point, pas plus que $\frac{1}{3}\ \mathrm{kg.m^{-3}}$!)
- Seule exception admise : angles (en radians) exprimés à l'aide de π (ex. : $\varphi = \frac{\pi}{3}$ est admis).

Exemple : Calculer $\frac{\pi}{\sqrt{2}}\ \mathrm{V}$ avec 2 chiffres significatifs.

$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx \frac{3,1}{1,4} = \frac{31}{14} = \frac{28+3}{14} = 2 + \frac{3}{14} \approx 2 + \frac{3}{15} = 2 + \frac{1}{5} = 2,2$ (la machine donne $\frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2,22$).

Donc $\frac{\pi}{\sqrt{2}}\ \mathrm{V} \approx 2,2\ \mathrm{V}$.

Ex. 0 : Effectuer les calculs numériques suivants (avec unité et 1 ou 2 chiffres significatifs) extraits de Physique 1 Mines-Ponts PSI 2020 :

- $t_1 = 2\frac{a}{c_\mathrm{s}}$ et $t_N = 2\frac{d_N}{c_\mathrm{s}}$ avec $a = 20\ \mathrm{m}$, $d_N = 50\ \mathrm{m}$ et $c_\mathrm{s} = 340\ \mathrm{m.s^{-1}}$.
- $v_1(t_1) = \frac{c_\mathrm{s}}{2b}$ et $v_1(t_N) = \frac{14,5}{19,5} v_1(t_1)$ avec $b = 26,3\ \mathrm{cm}$.
- $H_\mathrm{c} = \frac{RT}{Mg}$ avec $R = 8,31\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$, $T = 293\ \mathrm{K}$, $M = 29\ \mathrm{g.mol^{-1}}$ et $g = 9,8\ \mathrm{m.s^{-2}}$.
- $\rho_\mathrm{a}(0) = \frac{MP°}{RT}$ et $\rho_\mathrm{a}(H) = \rho_\mathrm{a}(0)\exp\left(-\frac{H}{H_\mathrm{c}}\right)$ et avec $P° = 1\ \mathrm{bar}$, $H = 8848\ \mathrm{m}$, sachant que $e^{-1} \approx \frac{1}{3}$.
- $E_\mathrm{m} = \sqrt{2\mu_0 c I_0}$ (E_m est un champ électrique) avec $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}}$, $c = 3.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$ et $I_0 \approx 1\ \mathrm{kW.m^{-2}}$.

[1] Seul le Concours CentraleSupélec autorise la calculatrice…

1. Equations du second degré : sus au discriminant !

Question naïve : comment résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ en étant certain de ne pas se tromper ?

- Etape 1 : Récrire l'équation sous la forme $x^2 + \alpha x + \beta = 0$
- Etape 2 : **La factoriser sous la forme** $\boldsymbol{\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4} - \beta}$
- Etape 3 :
  - Si $\frac{\alpha^2}{4} > \beta$, $x_\pm = -\frac{\alpha}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\beta}{\alpha^2}}\right)$
  - Si $\frac{\alpha^2}{4} < \beta$, $x_\pm = -\frac{\alpha}{2}\left(1 \pm j\sqrt{\frac{4\beta}{\alpha^2} - 1}\right)$
  - Si $\frac{\alpha^2}{4} = \beta$, $x = -\frac{\alpha}{2}$

2. Equations différentielles linéaires à coefficients constants

2.1. Premier ordre

Idées fondamentales :

- L'espace vectoriel des solutions d'une telle équation est de **dimension 1**. Donc **1 seule solution** forme la base des solutions, et il faut **1 condition initiale**.
- L'équation étant **linéaire**, la solution complète est la **superposition** de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière **imposée par le second membre**.

Ex. 1 : Soit un circuit RC série soumis à un échelon de tension $u(t) = E$ pour $t \geq 0$. Déterminer $u_C(t)$, le condensateur étant initialement déchargé. Tracer le portrait de phase.

Ex. 2 : Soit un circuit RL série soumis à un échelon de tension $u(t) = E$ pour $t \geq 0$. Déterminer $u_L(t)$. Tracer le portrait de phase.

Ex. 3 : Une balle de masse m est lancée vers le haut depuis l'origine des coordonnées avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_{0x}\overrightarrow{u_x} + v_{0z}\overrightarrow{u_z}$ dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\overrightarrow{u_z}$. On modélise les frottements de l'air par une force de frottement fluide $-m\alpha\vec{v}(t)$.

- Déterminer la loi horaire donnant $\vec{v}(t)$.
- Déterminer $x(t)$ et $z(t)$.
- Tracer l'allure de la trajectoire. Examiner et commenter le cas $\alpha \to 0$.

2.2. Second ordre sans second membre

On se donne l'équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ où $Q > 0$.

Idées fondamentales :

- L'espace vectoriel des solutions de cette équation est de **dimension 2**. Donc **2 solutions** forment la base des solutions, et il faut **2 conditions initiales**.
- On cherche des solutions **exponentielles** : $x(t) \propto \exp(pt)$ où $p \in \mathbb{C}$.

En injectant la solution exponentielle, on obtient la (trop ?) fameuse équation caractéristique :

$$p^2 + \frac{\omega_0}{Q} p + \omega_0^2 = 0$$

qui se récrit :

$$\left(p + \frac{\omega_0}{2Q}\right)^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$$

- $Q < \frac{1}{2}$: $p_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$: deux racines réelles.

$$x(t) = A \exp(p_+ t) + B \exp(p_- t) = \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)\left(A \exp\left(-\omega_0 t \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right) + B \exp\left(\omega_0 t \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right)\right)$$

ou encore :

$$x(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)\left(C \cosh\left(\omega_0 t \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right) + D \sinh\left(\omega_0 t \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right)\right)$$

Régime **apériodique**.

- $Q > \frac{1}{2}$: $p_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$: deux racines complexes conjuguées.

$$x(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)\left(A \cos\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\right) + B \sin\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\right)\right)$$

Régime **pseudo-périodique** amorti.

- $Q = \frac{1}{2}$: $p = -\frac{\omega_0}{2Q}$: une unique racine réelle. Cela ne donne qu'une solution en $\exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)$, or il en faut une deuxième (dimension 2) ! On cherche l'autre solution sous la forme $x(t) = f(t) \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)$. En injectant, on obtient : $\ddot{f}(t) = 0$: $f(t)$ est donc une fonction affine. La solution globale est donc de la forme :

$$x(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)(A + Bt)$$

Régime **critique**.

Ex. 4 : On considère un circuit RLC série soumis à un échelon de tension $u(t) = E$ pour $t \geq 0$. On suppose le condensateur initialement déchargé.

- Déterminer l'équation différentielle régissant la tension $u_R(t)$.
- Déterminer le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0.
- Déterminer et tracer la solution $u_R(t)$ dans l'hypothèse $Q \gg 1$.
- Tracer le portrait de phase.

2.3. Second ordre avec second membre constant

Idée fondamentale :

- L'équation étant **linéaire**, la solution complète est la **superposition** de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière **imposée par le second membre**.

Ex. 5 : Reprendre l'exercice 4 en s'intéressant maintenant à la tension $u_C(t)$.

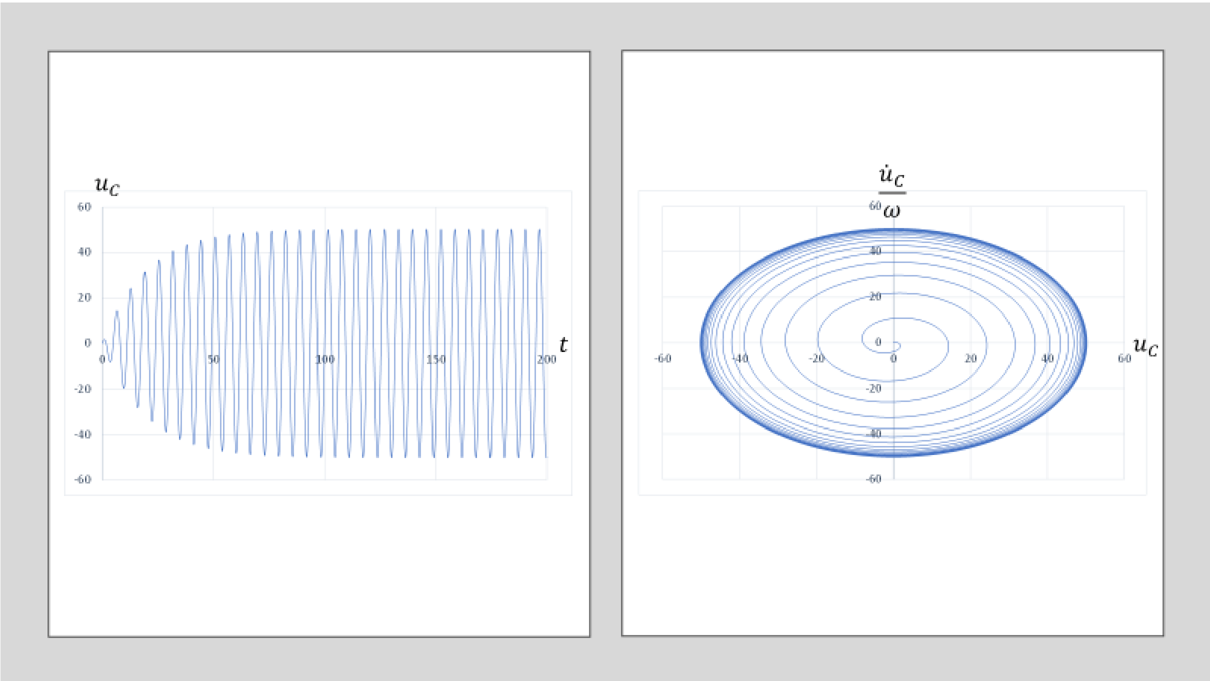
2.4. Second ordre avec second membre sinusoïdal

Idées fondamentales :

- L'équation étant **linéaire**, la solution complète est la **superposition** de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière **imposée par le second membre**.
- Le second membre étant **sinusoïdal**, passer en **notation complexe** pour déterminer la solution **particulière** imposée par le second membre.

Ex. 6 : Reprendre l'exercice 5, à l'exception du tracé du portrait de phase, dans le cas où $u(t) = E_0 \cos(\omega t)$ pour $t \geq 0$.

Concernant le portrait de phase, on donne le chronogramme $u_C(t)$ ainsi que le portrait de phase associé $\frac{\dot{u}_C}{\omega} = f(u_C)$ pour les valeurs $\omega = 0{,}99\ \omega_0$ et $Q = 10$:



Commenter en identifiant les différentes phases de l'évolution.

3. Quelques équations différentielles non linéaires

3.1. Premier ordre à variables séparables

Ex. 7 : Un point matériel de masse m est lancé avec la vitesse initiale $v_0\overrightarrow{u_x}$ depuis le point d'abscisse $x = 0$. Il est en mouvement horizontal à la vitesse $v(t)\overrightarrow{u_x}$, soumis à une force de frottement quadratique $-m\alpha v^2(t)\overrightarrow{u_x}$.

- Déterminer et tracer la loi de vitesse $v(t)$.
- Déterminer l'abscisse $x(t)$ du point matériel.

Ex. 8 : On reprend l'exercice 7 dans le cas d'un mouvement vertical, dans le champ de pesanteur $\vec{g} = g\overrightarrow{u_z}$ (attention ! l'axe Oz est orienté vers le bas !). Le point matériel est lâché sans vitesse initiale depuis le point de cote $z = 0$.

- Ecrire l'équation différentielle régissant $v(t)$ et déterminer la valeur v_∞ atteinte par la vitesse en régime permanent.
- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la variable $u(t) = \frac{v(t)}{v_\infty}$.
- En déduire que $v(t) = v_\infty \tanh\left(\sqrt{\alpha g}\, t\right)$.

  Donnée : $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \operatorname{atanh} x$ pour $x \in]-1,1[$.
- Montrer que $z(t) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\cosh\sqrt{\alpha g}\, t\right)$. Examiner cette expression pour $t \gg \frac{1}{\sqrt{\alpha g}}$ et commenter.

3.2. Second ordre du type $\ddot{x} = f(x)$: facteur intégrant.

Idées fondamentales :

- **Multiplier l'équation différentielle par $\dot{x}$ (facteur intégrant)**, ce qui donne :

  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[F\left(x(t)\right)\right]$ où F est une primitive de f.

- On est donc ramené à une équation différentielle du **premier ordre (intégrale première)** qui s'intègre en : $\frac{\dot{x}^2(t)}{2} - \frac{\dot{x}^2(0)}{2} = F\left(x(t)\right) - F\left(x(0)\right)$.

Ex. 9 : Soit un pendule simple (masse ponctuelle m suspendue à une corde sans masse de longueur ℓ, plongée dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\overrightarrow{u_z}$). On note $\theta(t)$ l'angle formé par le pendule avec la verticale.

- Montrer, en appliquant le théorème du moment cinétique et en utilisant la notion de **bras de levier**, que $\theta(t)$ est régi par l'équation : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta(t) = 0$. On exprimera ω_0 en fonction des données du problème.
- Intégrer cette équation différentielle pour les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$. Interpréter l'équation obtenue et l'obtenir directement par une autre voie.
- L'intégrale première obtenue est une équation différentielle du 1er ordre non linéaire. En procédant à une séparation des variables, montrer que la période du pendule est donnée par : $T = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0}\int_0^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = T_0\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$ où $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.
- Moyennant le changement de variable $\theta \to \varphi$ défini par $\sin\varphi = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}$, on peut montrer (vous pouvez le faire mais c'est un peu technique) que :

$$T = T_0 \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2)\sin^2\varphi}}}_{K(\sin(\theta_0/2))}$$

où K est l'intégrale elliptique de première espèce de Jacobi.
On remarque que $\lim\limits_{\theta_0 \to 0} T = T_0$: on retrouve l'isochronisme des petites oscillations.

- Pour les petites valeurs de θ_0, montrer, en effectuant un développement limité à l'ordre 2, la formule de Borda :

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

- Calculer numériquement la correction relative $\frac{T - T_0}{T_0}$ donnée par la formule de Borda pour $\theta_0 = 30°$.

Ex. 10 : Durée d'effondrement gravitationnel d'un nuage interstellaire

On considère un nuage interstellaire sphérique de masse M et de rayon $R(t)$, en phase d'effondrement gravitationnel : le rayon $R(t)$ décroît donc depuis sa valeur initiale R_0 jusqu'à 0. Le but de l'exercice est d'évaluer la durée τ que dure l'effondrement du nuage sur lui-même.

- En considérant un point matériel situé à la surface du nuage et soumis au seul champ de gravitation $\vec{g} = -\frac{\mathcal{G}M}{R^2(t)}\overrightarrow{u_r}$ du nuage, montrer que le rayon $R(t)$ du nuage est régi par l'équation différentielle :

$$\ddot{R} = -\frac{k}{R^2(t)}$$

où l'on exprimera k en fonction des données du problème.
- Intégrer cette équation différentielle pour les conditions initiales $R(0) = R_0$ et $\dot{R}(0) = 0$.
- L'intégrale première obtenue est une équation différentielle du 1^er ordre non linéaire. En procédant à une séparation des variables, montrer que la durée τ d'effondrement du nuage (c'est-à-dire la durée nécessaire pour que le rayon passe de R_0 à 0) est donnée par :

$$\tau = \sqrt{\frac{R_0^3}{2k}} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

où $x = \frac{R}{R_0}$.

- En effectuant le changement de variable $x = \sin^2\phi$, montrer que $\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R_0^3}{2k}} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}\rho}}$ où ρ est la masse volumique initiale du nuage.

4. Intégrales doubles et triples : cas usuels.

4.1. Surfaces et volumes fondamentaux (programme de CM2)

A connaître **par cœur** :

- Longueurs :
  - Cercle de rayon R : $\mathcal{L} = 2\pi R$
- Surfaces :
  - Disque de rayon R : $\mathcal{S} = \pi R^2$
  - Sphère de rayon R : $\mathcal{S} = 4\pi R^2$
  - Cylindre de rayon R et de hauteur h : $\mathcal{S} = 2\pi R h$ (surface latérale)
- Volumes :
  - Sphère de rayon R : $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$
  - Cylindre de rayon R et de hauteur h : $\mathcal{V} = \pi R^2 h$

Ex. 11 : (d'après X-ENS PSI 2020)

À cause du phénomène d'adsorption, il est souhaitable de donner aux objets matériels une forme susceptible de rendre minimale la surface de ces objets, dans le but d'utiliser ces objets comme étalons de masse.

- Pour un matériau homogène, quelle est la forme géométrique assurant, pour une masse donnée, la surface extérieure minimale (aucun calcul n'est attendu) ? Commenter l'aspect pratique de ce résultat.
- Par commodité, les étalons sont des cylindres droits à base circulaire de hauteur h et de diamètre D. Déterminer la relation entre h et D pour obtenir, à volume fixé, une surface extérieure $\mathcal{S}_{\text{ext}}$ minimale ?

4.2. Coordonnées cylindriques et sphériques

Enormité archi-fréquente à ne pas commettre : dessiner la base des coordonnées cylindriques sur l'axe $\mathrm{O}z$ ou la base des coordonnées sphériques à l'origine O de l'espace. **Cela n'a aucun sens !!!** (Pourquoi ?)

Donc :

- **Dessiner** (c'est **obligatoire**) la base **locale** utilisée **au point courant** M considéré.

Ex. 12 : (moins de 1 minute, aucune hésitation)

- Représenter les coordonnées cylindriques (r, θ, z) repérant la position d'un point M de l'espace ainsi que la base correspondante $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$.
- Représenter les coordonnées sphériques (r, θ, φ) repérant la position d'un point M de l'espace ainsi que la base correspondante $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$.

4.3. Intégrales doubles

Soit à calculer l'intégrale $\iint_{\mathcal{S}} f(\mathrm{M})\, \mathrm{d}\mathcal{S}$ où M est un point quelconque appartenant à la surface $\mathcal{S}$ et $f(\mathrm{M})$ une fonction continue des coordonnées spatiales.

Question naïve :

Comment choisir la surface élémentaire $\mathrm{d}\mathcal{S}$ pour rendre le calcul de l'intégrale le plus simple possible ?

Idée fondamentale :

- **Ne pas** écrire, tête baissée et sans réfléchir : $\mathrm{d}\mathcal{S} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en cartésiennes, ou $\mathrm{d}\mathcal{S} = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ en cylindriques, ou $\mathrm{d}\mathcal{S} = r\,\mathrm{d}r \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ en sphériques. La plupart du temps, cela s'avère inutile et même dangereux.
- **Se poser la question** : de quelle(s) coordonnée(s) spatiale(s) dépend la fonction $f(\mathrm{M})$ à intégrer ?
- **Choisir** l'élément de surface $\mathrm{d}\mathcal{S}$ de manière que $f(\mathrm{M})$ soit **constante** sur $\mathrm{d}\mathcal{S}$ à dM près et le **dessiner** !

Ex. 13 : Calculer la résultante des forces de pression subie par une paroi rectangulaire de piscine hors-sol de longueur $\ell = 5\ \mathrm{m}$, la hauteur d'eau valant $h = 1{,}20\ \mathrm{m}$.

Ex. 14 : Soit un barrage cylindrique de rayon R, d'amplitude angulaire $2\theta_0$, de hauteur H et d'axe de symétrie $\mathrm{O}x$.

- Montrer que la résultante des forces de pression s'exerçant sur le barrage peut s'écrire :

$$\overrightarrow{F_P} = 2R \int_0^H \int_0^{\theta_0} (P(z) - P°) \cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_x}$$

- Effectuer le calcul.

Ex. 15 : (très important)

- On considère un problème à symétrie sphérique de centre O et une fonction $f(\mathrm{M}) = f(r)$ à intégrer sur la sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon R. Exprimer **sans calcul** l'intégrale $\iint_{\mathcal{S}} f(\mathrm{M})\,\mathrm{d}\mathcal{S}$.
- On considère un problème à symétrie cylindrique d'axe $\mathrm{O}z$ et une fonction $f(\mathrm{M}) = f(r)$ à intégrer sur la surface latérale $\mathcal{S}$ du cylindre d'axe $\mathrm{O}z$, de rayon R et de hauteur h. Exprimer **sans calcul** l'intégrale $\iint_{\mathcal{S}} f(\mathrm{M})\,\mathrm{d}\mathcal{S}$.

Ex. 16 :

- Soit une fonction définie en coordonnées sphériques par $f(\mathrm{M}) = \psi(r)\,\chi(\theta)$. Montrer que l'intégrale $\iint_{\mathcal{S}} f(\mathrm{M})\,\mathrm{d}\mathcal{S}$ sur la sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon R s'écrit :

$$\iint_{\mathcal{S}} f(\mathrm{M})\,\mathrm{d}\mathcal{S} = 2\pi R^2 \psi(R) \int_0^{\pi} \sin\theta\ \chi(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

- Calculer cette intégrale dans le cas $\chi(\theta) = \sin^2\theta$ (conseil : résister à la tentation de linéariser…).

Ex. 17 :

- Soit une fonction définie en coordonnées cylindriques par $f(\mathrm{M}) = \psi(r)\,\zeta(z)$. Exprimer l'intégrale $\iint_{\mathcal{S}} f(\mathrm{M})\ \mathrm{d}\mathcal{S}$ sur la surface latérale $\mathcal{S}$ du cylindre d'axe $\mathrm{O}z$, de rayon R et de hauteur h en fonction, notamment, de $\int_0^h \zeta(z)\,\mathrm{d}z$.
- Calculer cette intégrale dans le cas $\zeta(z) = \alpha z$.

4.4. Intégrales triples

Soit à calculer l'intégrale $\iiint_{\mathcal{V}} f(\mathrm{M})\,\mathrm{d}\mathcal{V}$ où M est un point quelconque appartenant au volume $\mathcal{V}$ et $f(\mathrm{M})$ une fonction continue des coordonnées spatiales.

Question naïve :

Comment choisir le volume élémentaire $\mathrm{d}\mathcal{V}$ pour rendre le calcul de l'intégrale le plus simple possible ?

Idée fondamentale :

- **Ne pas** écrire, tête baissée et sans réfléchir : $\mathrm{d}\mathcal{V} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ en cartésiennes, ou $\mathrm{d}\mathcal{V} = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ en cylindriques, ou $\mathrm{d}\mathcal{S} = r^2\,\mathrm{d}r \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ en sphériques. La plupart du temps, cela s'avère inutile et même dangereux.
- **Se poser la question** : de quelle(s) coordonnée(s) spatiale(s) dépend la fonction $f(\mathrm{M})$ à intégrer ?
- **Choisir** l'élément de volume $\mathrm{d}\mathcal{V}$ de manière que $f(\mathrm{M})$ soit **constante** sur $\mathrm{d}\mathcal{V}$ à dM près et le **dessiner** !

Ex. 18 : (très important)

- On considère un problème à symétrie sphérique de centre O et une fonction $f(\mathrm{M}) = f(r)$ à intégrer sur la boule $\mathcal{V}$ de centre O et de rayon R. Montrer que :
$$\iiint_{\mathcal{V}} f(\mathrm{M})\,\mathrm{d}\mathcal{V} = 4\pi \int_0^R r^2 f(r)\,\mathrm{d}r$$
- Effectuer le calcul pour $f(r) = \frac{k}{r^\alpha}$ où $\alpha > 0$. A quelle condition sur α l'intégrale est-elle convergente ?

Ex. 19 : (très important)

- On considère un problème à symétrie cylindrique d'axe $\mathrm{O}z$ et une fonction $f(\mathrm{M}) = f(r)$ à intégrer sur le volume $\mathcal{V}$ délimité par la surface latérale $\mathcal{S}$ du cylindre d'axe $\mathrm{O}z$, de rayon R et de hauteur h et par les deux disques d'axe $\mathrm{O}z$, de rayon R et de cotes respectives $z = 0$ et $z = h$. Montrer que :
$$\iiint_{\mathcal{V}} f(\mathrm{M})\,\mathrm{d}\mathcal{V} = 2\pi h \int_0^R r f(r)\,\mathrm{d}r$$
- Effectuer le calcul pour $f(r) = \frac{k}{r^\alpha}$ où $\alpha > 0$. A quelle condition sur α l'intégrale est-elle convergente ?